Introduction à l'informatique

pour les mathématiques, la physique et les sciences computationnelles

Yann Thorimbert

Partie 2 | Chapitre 5
Algorithmes sur graphes

Yann Thorimbert

Chapitres du cours (seconde partie du cours)

0. Introduction à la complexité algorithmique
1. Algorithmes de tri naïfs
2. Structures de données : tableaux, listes et dictionnaires
3. Tri fusion et récursivité
4. Algorithmes de recherche au sein d'une séquence
5. **Algorithmes sur graphes** ←

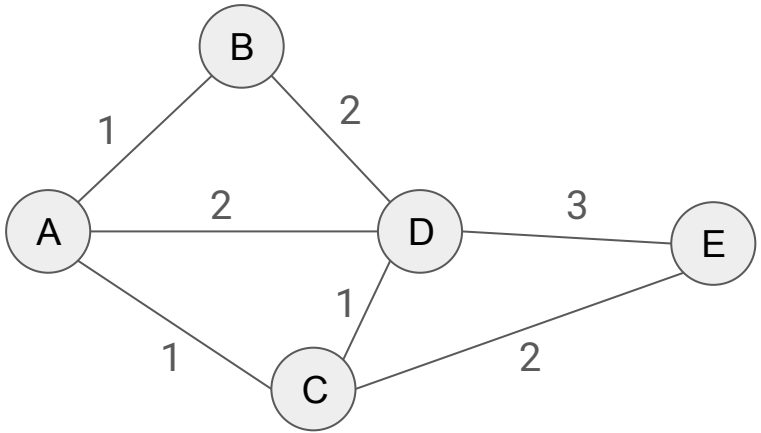
Contenu de ce chapitre

- Arbres :
  - Utilisation de structures en arbre pour représenter des séquences triées et y chercher des éléments.
  - Utilisation d'un arbre pour l'implémentation d'un dictionnaire.
  - Utilisation d'un arbre pour la compression de données.
  - Utilisation d'un arbre pour la recherche d'une solution à un problème combinatoire.
- Graphes :
  - Algorithmes de plus court chemin.

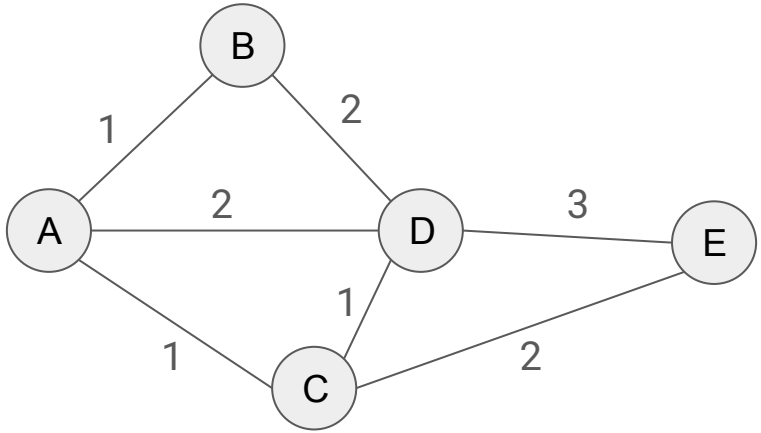
Graphes | **Exemple de problème**

Des villes sont reliées par des routes. Le temps mis pour joindre deux villes *via* une route dépend de la route.

Partant de A, quel est le plus court chemin pour aller à E ?

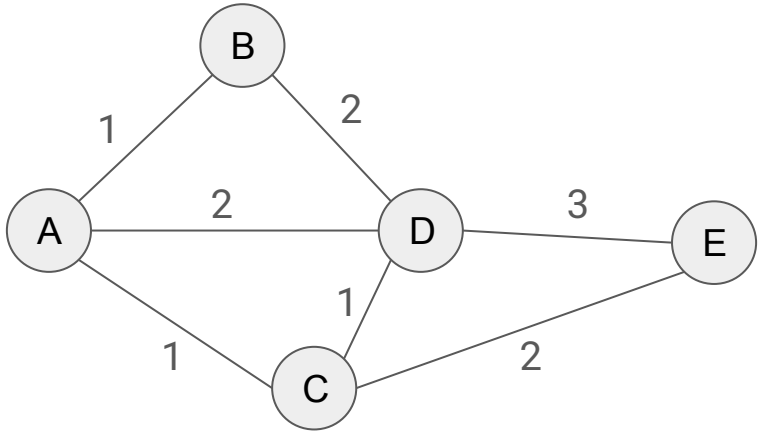


Graphes | **Terminologie**



Graphes | **Terminologie**

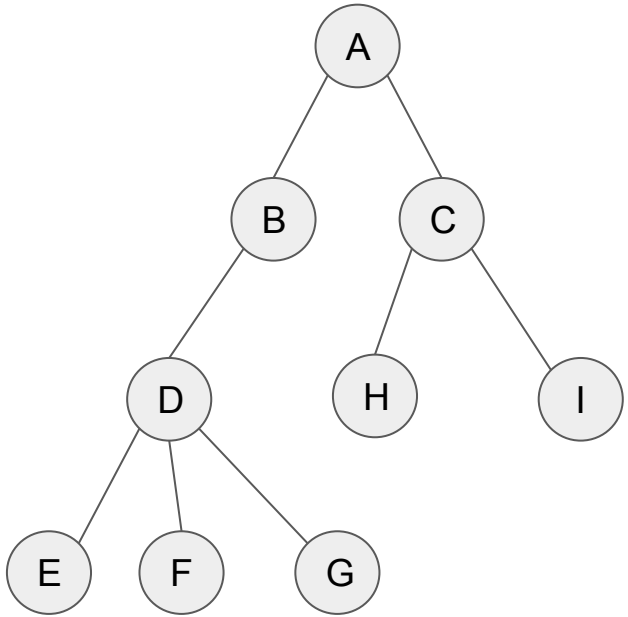
- Nous considérons pour l'instant une structure mathématique, et non pas informatique.
- A, B, C, D et E sont ici des **noeuds** du graphe.
- Certains noeuds sont reliés entre eux par des **arêtes**.
- Ces arêtes peuvent être **orientées** ou non (ici, elle ne le sont pas).
- Ces arêtes peuvent êtres **pondérés** ou non (ici, elles le sont).
- Nous ne considérons que des graphes non-orientés **connexes**, où tout noeud peut être atteint depuis tout autre noeud en naviguant le long des arêtes.



Arbres | **Terminologie**

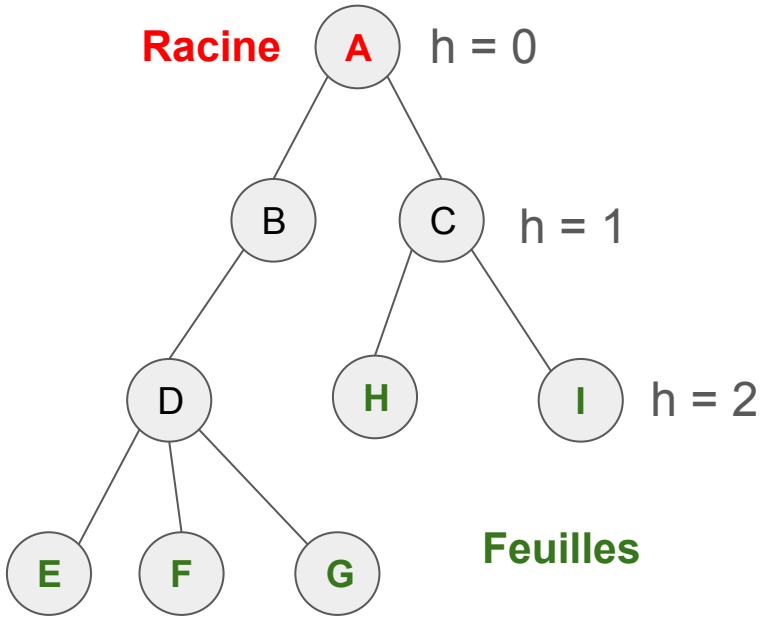
Arbres | **Terminologie**

- Un arbre est un **cas particulier de graphe** connexe qui ne contient aucun cycle.
- Dans un arbre **enraciné**, chaque noeud possède exactement un **parent**, sauf celui qu'on a désigné comme étant la **racine**.
- Chaque noeud peut alors posséder des **enfants**.



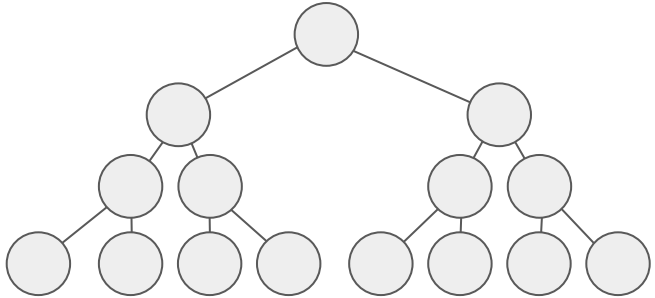
Arbres | **Terminologie**

- Le noeud ne possédant pas de parent se nomme la **racine**.
- Les noeuds ne possédant pas d'enfants se nomment les **feuilles**.
- La **hauteur** d'un noeud est le nombre d'arêtes à parcourir pour y parvenir depuis la racine.
- La **hauteur** d'un arbre est sa profondeur maximale.



Arbres binaires

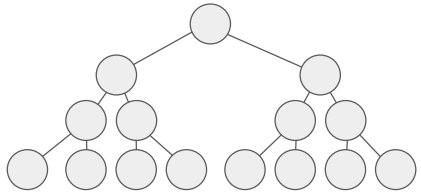
- Arbres où chaque noeud possède deux enfants, sauf les feuilles ; chaque parent possède un enfant gauche et un enfant droit.

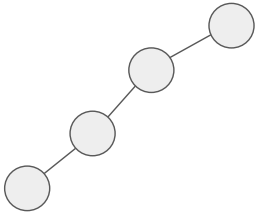


- Si h est la hauteur de l'arbre, alors il y a au plus 2^h feuilles.
- De même, il y a au plus $n = 2^h + 2^{h-1} + \ldots + 2^0 = 2^{h+1} - 1$ noeuds.
- On peut voir une correspondance entre l'écriture d'un nombre à k chiffres et le chemin pour arriver à une feuille.

Arbres parfaits et dégénérés

- Arbre parfait : toutes les feuilles ont la même hauteur.
- Arbre complet : arbre dont tous les étages sauf le dernier sont entièrement remplis.
- Arbre dégénéré : tous les noeuds ont exactement un enfant (sauf la feuille).



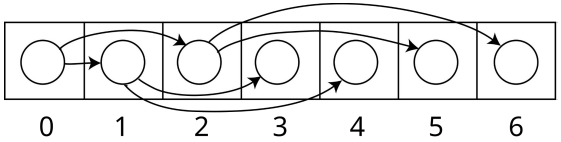


Arbres binaires | **Implémentation**

- On peut définir un type abstrait correspondant à un arbre binaire. Ce type abstrait retranscrit l'objet mathématique discuté plus haut. Il peut par exemple être implémenté *via* une variante de liste chaînée, ou bien *via* un tableau de données.

- La pertinence d'une implémentation plutôt que l'autre dépend des garanties que l'on possède (par exemple : l'arbre est-il de taille fixe ? est-il proche d'être parfait ?)

- Exemple d'implémentation via un tableau, pertinente pour les arbres assez complets :

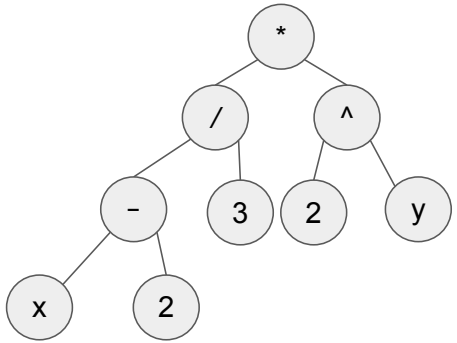


- Ici, nous travaillerons uniquement avec le type abstrait, sans nous soucier de l'implémentation choisie.

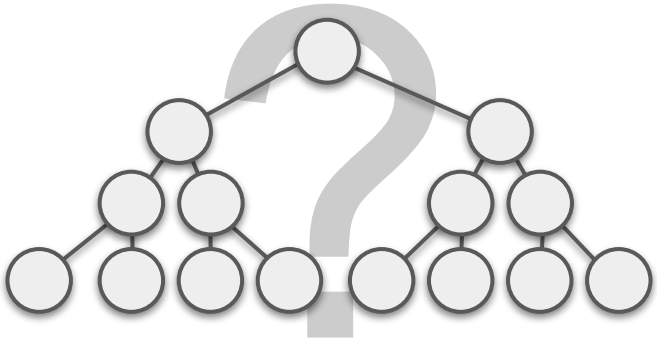
Commentaire

- De très nombreux systèmes intéressants peuvent être représentés par des arbres.
- Dans ce cours, nous sommes loin de pouvoir tous les aborder.
- Exemple : une expression algébrique s'exprime comme un arbre :

```
(x-2)/3 * 2^y
```



Arbre binaire de recherche



Arbre binaire de recherche

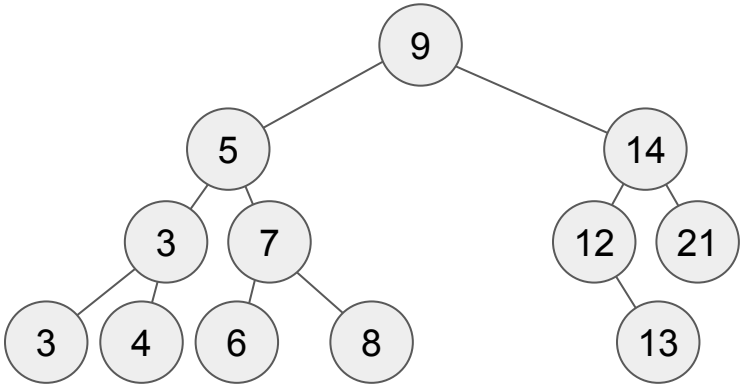
- Il est possible d'aborder le problème de la recherche au sein d'une séquence avec un tout autre point de vue.
- Rappel : nous avons traité de l'algorithme de recherche dichotomique, qui permet de trouver l'emplacement d'une valeur donnée au sein d'une séquence déjà triée.

Arbre binaire de recherche

- Idée : construire un arbre dont les noeuds portent les valeurs d'une séquence ordonnée.
- Chaque enfant de gauche est plus petit ou égal à son parent.
- Chaque enfant de droite est plus grand que son parent.
- Cf. slides d'illustration pas à pas.

Arbre binaire de recherche | **Exemples d'insertions**

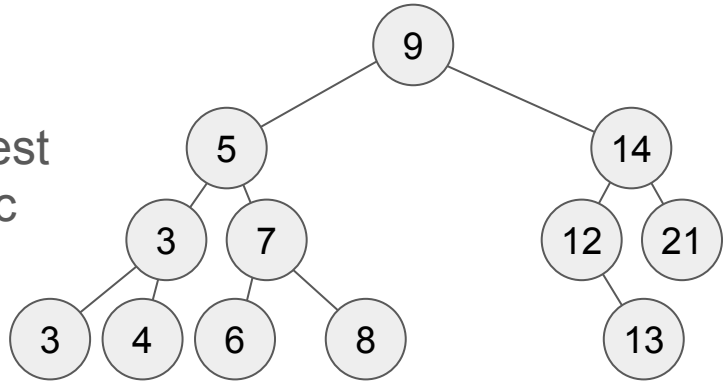
S = [9, 14, 5, 3, 7, 12, 3, 6, 13, 21, 8, 4]



Cf. illustrations pas à pas

Arbre binaire de recherche | **Complexité de la recherche**

- L'efficacité de la recherche dépend de **l'ordre d'insertion** des éléments.
- Si l'arbre est parfait, le nombre d'étapes est proportionnel à la hauteur de l'arbre, donc *O*(log(n)).



- Si l'arbre est dégénéré, le nombre d'étapes est *O*(n).

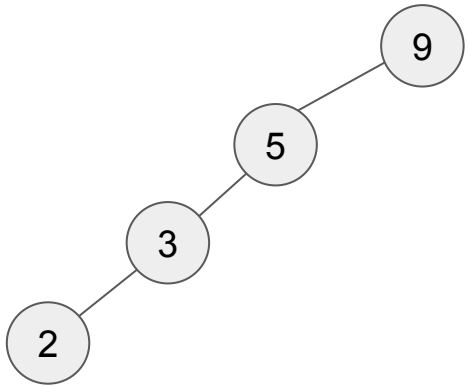
Arbre binaire de recherche | **Complexité de la recherche**

- On suppose que tous les noeuds sont aussi susceptibles d'être recherchés les uns que les autres et que l'arbre est parfait.
- Il y a 2^h noeuds en hauteur h, 2^{h-1} en hauteur h - 1, etc.
- La longueur du chemin vers la hauteur h vaut h (par définition) ⇒ Il y a $O(h)$ comparaisons à effectuer pour accéder à un noeud en hauteur h.
- Si on cherche chaque noeud, on a donc un coût d'accès total :
  $C = 2^h \cdot h + 2^{h-1} \cdot (h-1) + ... + 2^0 \cdot 0$ ⇒ C est $O(h \cdot 2^h)$
- Par conséquent, le coût d'accès vaut en moyenne :
  $E = C / n = C / (2^{h+1} - 1)$ ⇒ E est $O(h)$, c'est-à-dire $O(\log(n))$

Arbre binaire de recherche | **Arbres dégénérés**

- Exemple d'ordre d'insertion donnant un arbre totalement déséquilibré :
  S = [9, 5, 3, 2].

- Il existe des méthodes permettant de forcer l'équilibrage des arbres (non étudiées dans ce cours).



Arbre binaire de recherche | **Commentaires finaux**

Attention à distinguer "pire" et "meilleur" en termes d'équilibre de l'arbre VS en termes d'emplacement de l'élément recherché

	Arbre parfait	**Arbre dégénéré**
Meilleur des cas	O(1)	O(1)
Cas moyen	O(log(n))	O(n)
Pire des cas	O(log(n))	O(n)

Arbre binaire de recherche | **Commentaires finaux**

- Une insertion est également $O(n)$ dans le pire des cas et $O(\log(n))$ en moyenne.

- La construction de l'arbre tout entier est $O(n^2)$ dans le pire des cas ; on peut la considérer comme un algorithme de tri.

- Certains algorithmes de tri $O(n \log(n))$ comme *heapsort* (non traité dans ce cours) sont spécialement conçus pour tirer profit de la structure d'arbre, avec des garanties en plus sur cette dernière.

- D'autres structures courantes, comme les files de priorité (*priority queue*), sont souvent implémentées grâce à un arbre également.

Arbre binaire de recherche | **Implémentation**

Comme toujours, toutes sortes d'implémentations sont envisageables.

Dans des langages le permettant, il est commode de définir une structure de donnée Noeud possédant les attributs suivants : `valeur`, `enfant_gauche` et `enfant_droite`. Ces deux derniers attributs pointent sur d'autres noeuds, à la manière d'une **liste chaînée**.

Voici un exemple en Python :

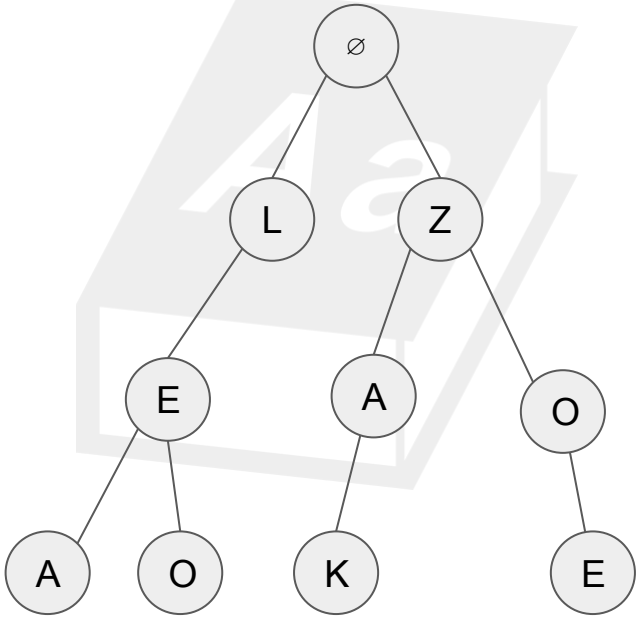
```
class Noeud:

    def __init__(self, valeur):
        self.valeur = valeur
        self.enfant_gauche = None #pas d'enfant initialement
        self.enfant_droite = None #pas d'enfant initialement
```

Arbre binaire de recherche | **Code pour la recherche**

Exemple récursif en Python à partir d'un noeud racine :

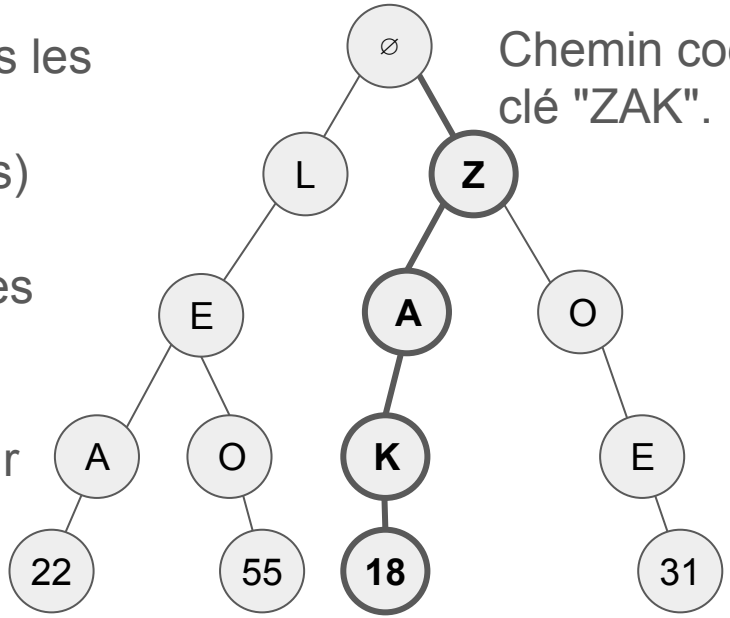
```
def cherche_noeud(racine, valeur):
    if racine.valeur is None or racine.valeur == valeur:
        return racine # contiendra None si valeur pas trouvée
    elif valeur < racine.valeur:
        return cherche_noeud(racine.enfant_gauche, valeur)
    else:
        return cherche_noeud(racine.enfant_droite, valeur)
```

Arbres pour représenter un dictionnaire



Arbres représentant un dictionnaire | **Idée générale**

- Observation : le chemin suivi à travers les branches d'un arbre décrit une combinaison unique (pas de collisions)
- Le **chemin** suivi à travers les branches peut donc décrire une **clé**.
- La **valeur** d'une **feuille** décrit la valeur associé à son chemin.



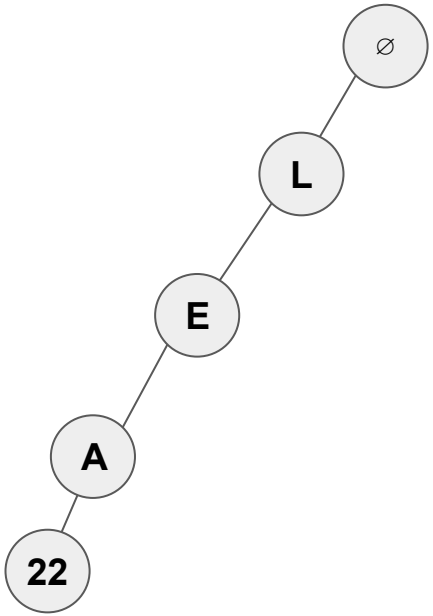
Chemin codant la clé "ZAK".

Arbres représentant un dictionnaire | **Idée générale**

```
age = { } # dictionnaire vide
```

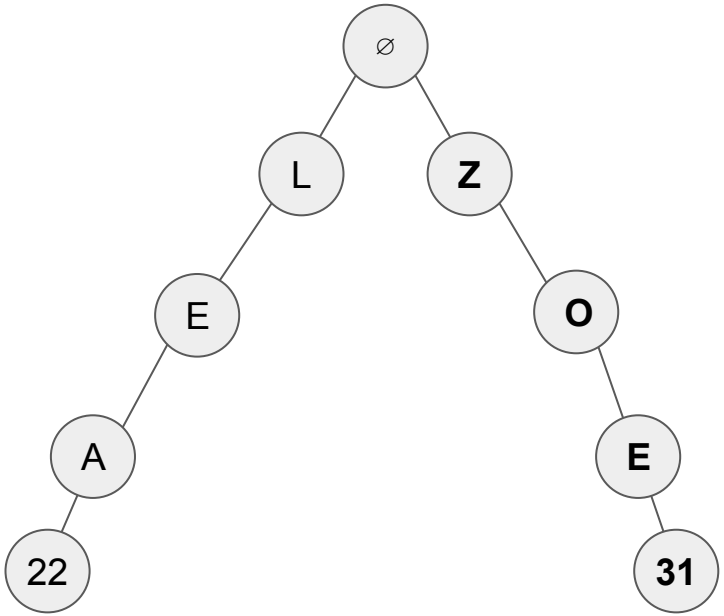
Arbres représentant un dictionnaire | **Idée générale**

```
age = { } # dictionnaire vide

age["LEA"] = 22
```



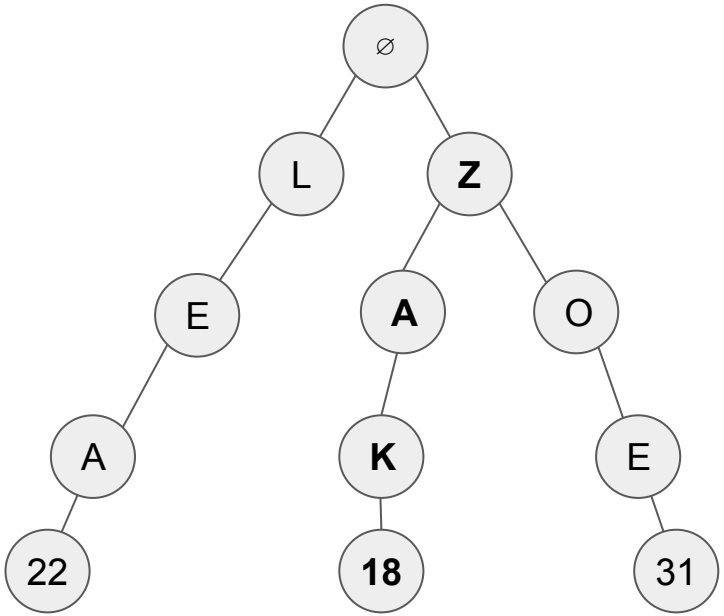
Arbres représentant un dictionnaire | **Idée générale**

```
age = { } # dictionnaire vide

age["LEA"] = 22
age["ZOE"] = 31
```



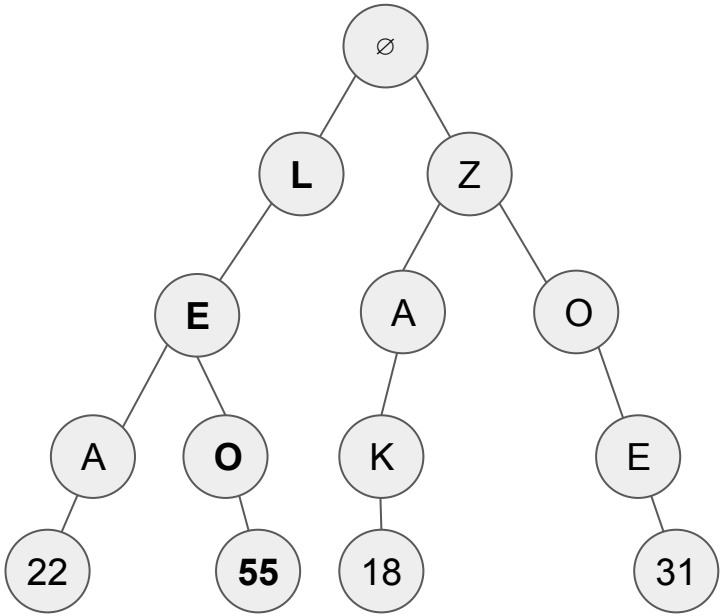
Arbres représentant un dictionnaire | **Idée générale**

```
age = { } # dictionnaire vide

age["LEA"] = 22
age["ZOE"] = 31
age["ZAK"] = 18
```



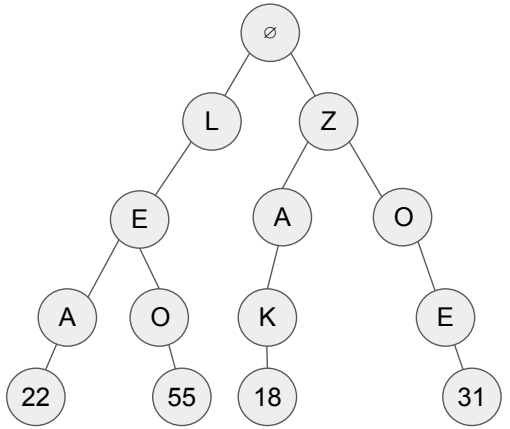
Arbres représentant un dictionnaire | **Idée générale**

```
age = { } # dictionnaire vide

age["LEA"] = 22
age["ZOE"] = 31
age["ZAK"] = 18
age["LEO"] = 55
```

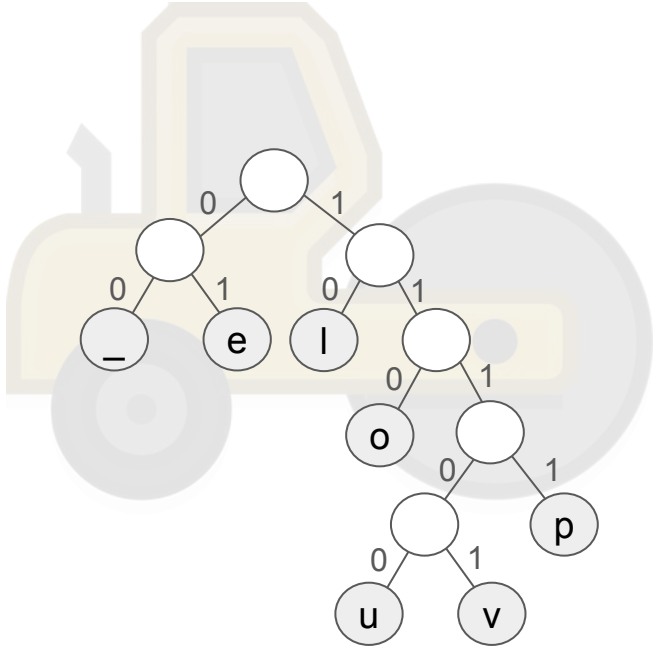


Arbres VS tables de hachage pour la recherche d'élément

- Pire des cas *O*(log(n)) en utilisant des techniques d'équilibrage : mieux que le pire des cas d'une table de hachage, à savoir *O*(n).
- Cas moyen en *O*(log(n)) moins bon que pour une table de hachage, à savoir *O*(1).
- Permet facilement d'avoir un dictionnaire ordonné, contrairement aux tables de hachage standard.



Arbres et compression d'information



Un autre exemple d'utilisation des arbres

- Dans le chapitre sur le codage des médias, nous avons mentionné les potentielles compressions d'information mises en oeuvre pour économiser de l'espace en mémoire.
- Une méthode de compression intéressante est le codage de Huffman, dont nous présentons ici l'idée appliquée à la compression d'un texte. On peut imaginer étendre l'idée à d'autres types de médias.
- Le résultat du codage de Huffman est un dictionnaire dont les clés sont des nombres binaires. Chaque clé nous dit comment encoder un symbole donné.
- Le codage de Huffman permet une compression **sans perte**. Il est mis en oeuvre (conjointement à d'autres méthodes) au sein de données utilisées au quotidien telles que les images au format png.

Idée de base de la compression de Huffman

- Approche naïve : s'il y a n symboles à coder, alors on peut les faire correspondre à des nombres en binaire codés sur $\log_2(n)$ bits.

Symbole	Codage
A	00
B	01
C	10
D	11

Idée de base de la compression de Huffman

- Approche naïve : s'il y a n symboles à coder, alors on peut les faire correspondre à des nombres en binaire codés sur $\log_2(n)$ bits.

- Cependant, on aimerait coder les caractères rares sur davantage de bits, et les caractères courant sur moins de bits…

Symbole	Codage
A	0
B	1
C	10
D	11

Idée de base de la compression de Huffman

- Approche naïve : s'il y a n symboles à coder, alors on peut les faire correspondre à des nombres en binaires codés sur $\log_2(n)$ bits.
- Cependant, on pourrait coder les caractères rares sur davantage de bits, et les caractères courant sur moins de bits…
- … à condition de savoir comment délimiter les bits de chaque caractère !
- Comment s'en sortir ? Ici, le codage produit sera un code préfixe, c'est-à-dire qu'**aucun codage ne peut être le début d'un autre**.

Codage de Huffman | **Idée générale**

Code préfixe

- Aucun codage ne doit être le début d'un autre.
- Exemple : 00, 01 et 1001 forment ensemble un code préfixe car aucun de ces code n'est le début de l'un des autres.
- Exemple : 00, 01 et 0010 ne forment pas ensemble un code préfixe.
- Les **chemins menant aux feuilles** d'un arbre forment nécessairement un ensemble de code préfixe (sinon ce ne serait pas des feuilles).

Codage de Huffman | **Idée générale**

Idée générale :

- Les morceaux d'information qui se répètent (caractères d'un texte, couleurs des pixels d'une image, …) forment les noeuds d'un arbre binaire.
- Chaque morceau est codé par son chemin dans l'arbre.
- Les morceaux d'information les moins fréquents sont rangés plus profondément dans l'arbre.

Codage de Huffman | **Algorithme**

Tant que la liste des noeuds n'est pas vide :

1. Trier* la liste des noeuds par fréquence.
2. Sélectionner les deux noeuds les moins fréquents et former un arbre dont la racine prend la valeur de leur somme.
3. Insérer la racine de l'arbre obtenu dans la liste des noeuds.
4. Pour former les clés, attribuer la valeur de codage 0 à toutes les branches de gauche, et 1 à toutes les branches de droite.

* En réalité, il vaut mieux maintenir une file de priorité pour être plus efficace. L'algorithme peut être $O(n \log(n))$.

Codage de Huffman | **Exemple sur un texte**

Texte à compresser : "`le_loup_vole_le_poele`".

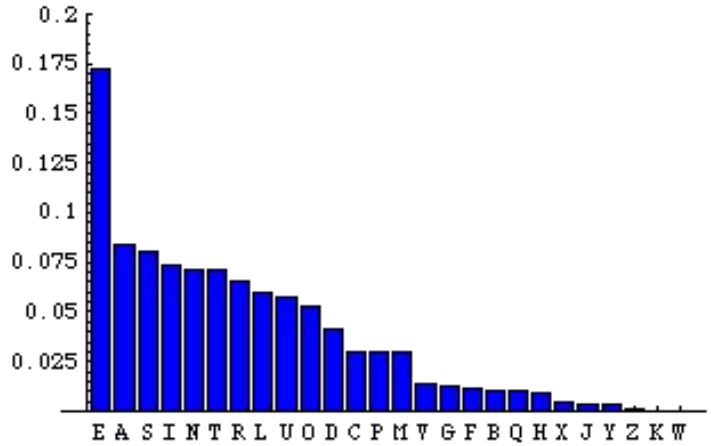
Cf. slides d'illustration pas à pas.

Caractère	Fréquence
`l`	5
`e`	5
`_`	4
`o`	3
`p`	2
`u`	1
`v`	1

Attention : cet exemple est volontairement peu efficace en compression afin de voir plusieurs cas de figure en une seule application de l'algorithme.

Commentaire sur la fréquence des caractères

- La plupart du temps, la distribution de l'information n'est pas homogène.
- Fréquence des caractères des langues naturelles (exemple du français) :



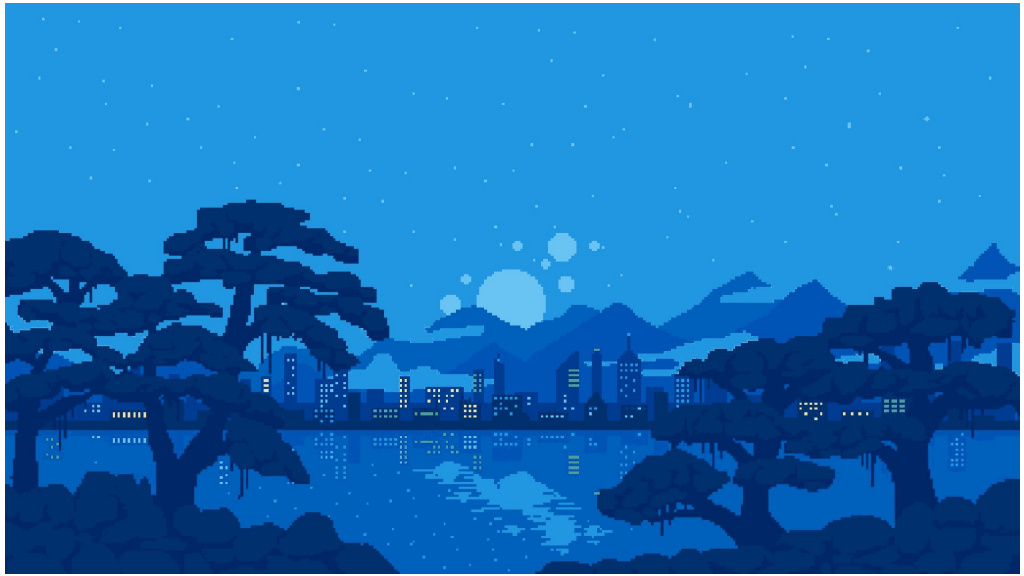
"Dans la dernière leçon, nous avons appris à tracer des rayons lumineux provenant d'une source de lumière comme cette ampoule. Nous avons aussi parlé du modèle corpusculaire de la lumière, dans lequel des grains de lumière appelés photons se déplacent en ligne droite et à vitesse constante. Quel est le lien entre les rayons que nous avons appris à tracer et ces photons ?

Nous allons ici répondre à cette question. Dans le modèle que nous utilisons, les photons son émis par le filament de l'ampoule dans une direction aléatoire en réalité on ne peut pas voir les photos individuellement par ailleurs il se déplace bien plus vite et sont bien plus nombreux que sur le schéma que nous voyons même si nous l'été sinon plus rapide et plus nombreux comme ici pour bien les voir nous faisons exprès de les représenter plus grand plus lent et moins nombreux qui ne sont en réalité nous allons également cessé d représenter non pour la l'écran maintenant que nous avons dû les photons sont émis par une source de lumière le cas que nous voyons ici correspond à une source ponctuelle de lumière le cas que nous voyons ici correspond lui à une source de lumière non conques thuel les photons peuvent être émis depuis n'importe quel point de la source"

Codage de Huffman | **Exemple sur une image**

Image à compresser

Couleur	Fréquence [%]
A	50.8
B	19.6
C	11.6
D	9.1
E	5.0
F	2.6
G	1.1
H	0.1
I	0.1



Auteur : kejsirajbek - https://whvn.cc/xl6v7v

Commentaire sur l'entropie de Shannon

- Un noeud de hauteur h correspond une fréquence $f \approx 2^{-h}$.
  (Si l'on choisit un chemin au hasard dans l'arbre, il faut enchaîner h choix binaires "corrects" pour atteindre un tel noeud).
  ⇒ la hauteur d'un noeud de fréquence f est $h = \log_2(1/f)$
- Le symbole correspondant à ce noeud s'écrit avec h bits.
- Le nombre total de bits pour coder le message est donc :

$$S = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot h_i = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \log_2(1/f_i) = -\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \log_2(f_i)$$

On peut l'envisager comme une mesure de la diversité d'une information.
On retrouve cette forme en physique et dans d'autres domaines.

Commentaire sur l'entropie de Shannon et la physique

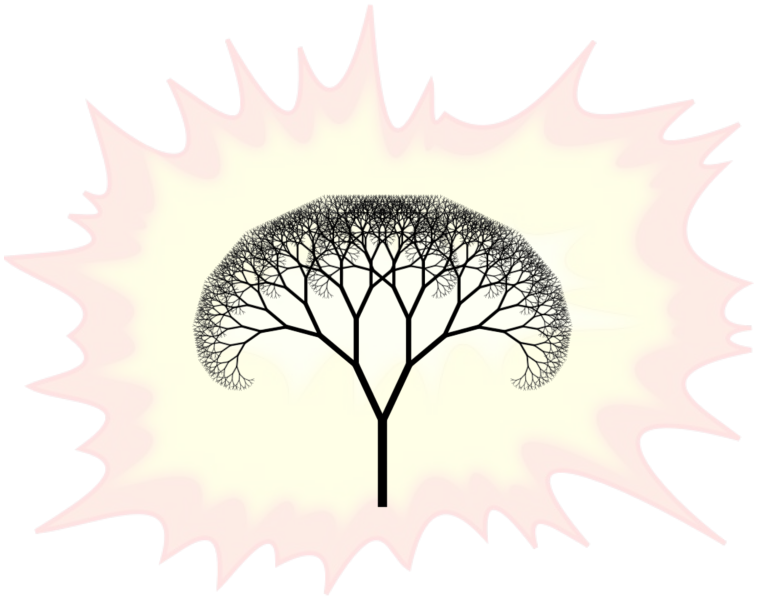
- Entropie "statistique" ⇒ codage de Huffman d'un système physique génère un fichier dont la taille est l'entropie du système.
- Seule différence avec entropie de Shannon : facteur k_B qui donne l'unité physique souhaitée (J/K).
- Si toutes les configurations sont équiprobables et qu'il y en a Ω :

$$S = -k_B \sum_{i=1}^{\Omega} (1/\Omega) \cdot \log(1/\Omega) = k_B \log(\Omega)$$

- La distribution des énergies d'un système qui maximise S est la distribution de Boltzmann, et elle est telle qu'elle respecte $dS = \delta Q/T$. Elle correspond au cas où la probabilité de la configuration $p \approx e^{-E/(kT)}$. C'est la même distribution qui donne arbre de Huffman "régulier" (cf. exemple couleurs).

(Diapositive hors champ)

Arbres et problèmes combinatoires



Problème de la somme de sous-ensembles

- Soit E un ensemble d'entiers.
- Question : existe-t-il un sous-ensemble de E dont la somme des éléments vaut S ?
- Il s'agit d'un **problème de décision** (la réponse est "oui" ou "non").
- Exemples :
  - E = {3, 5, 7} et S = 8 (la réponse est "oui").
  - E = {3, 5, 7} et S = 13 (la réponse est "non").

Problème de la somme de sous-ensembles

- Soit E un ensemble composé de n entiers. Existe-t-il un sous-ensemble de E dont la somme des éléments vaut S ?

- Exemples :
  - E = {3, 5, 7} et S = 8 (la réponse est "oui").
  - E = {3, 5, 7} et S = 13 (la réponse est "non").

- Sondage : complexité du meilleur algorithme de recherche **exhaustif** ?
  votamatic.unige.ch : NJKS

Problème de la somme de sous-ensembles

- Soit E un ensemble d'entiers.
- Question : existe-t-il un sous-ensemble de E dont la somme des éléments vaut S ?
- Il s'agit d'un problème de décision (la réponse est "oui" ou "non").
- Exemples :
  - E = {3, 5, 7} et S = 8 (la réponse est "oui").
  - E = {3, 5, 7} et S = 13 (la réponse est "non").
- Nous dirons que ce problème est "**difficile**" car le nombre de sous-ensembles à tester **croît exponentiellement** avec le nombre n d'éléments de E.

Représentation du problème

- Il y a deux façons de se représenter le problème avec un arbre.

- Première méthode : arbre à facteur de branchement variable.
  Chaque noeud possède comme enfants les nombres qui n'ont pas été utilisés le long du chemin courant.

- Dessin pour E = {2,3,4,5} :

Représentation du problème | **Arbre binaire**

- Seconde méthode : on peut numéroter E_i les éléments de E, que l'on considère maintenant comme une séquence. À chaque E_i on peut associer une valeur binaire u_i qui nous dit si le nombre fait partie ou pas du sous-ensemble considéré.

- Par exemple : E = [2,3,4,5] et u = [0,1,0,1] génère la somme 3 + 5 = 8. Dessin :

Représentation du problème | **Arbre binaire**

- Dans la méthode binaire, chaque chemin possible représente un sous-ensemble unique de E.

- Cela nous donne le nombre total de sous-ensembles : l'arbre étant de hauteur n, il existe donc 2^{n+1} - 1 noeuds et donc chemins possibles. Le problème est bien exponentiellement grand en fonction de n.

Recherche en profondeur

- On peut formuler un algorithme qui cherche en priorité dans la **profondeur** de l'arbre.
- L'algorithme effectue une recherche systématique. On a la garantie qu'il trouvera la bonne solution.
- Nous donnons ici l'idée générale.
- Les **diapos détaillées** sur la recherche en profondeur donnent une illustration pas à pas.

Recherche en profondeur | **Idée de l'algorithme**

À chaque fois qu'un noeud est généré, on effectue dans l'ordre :

1. Si la somme associée au chemin qui mène jusque là vaut S, retourner `True`.
2. Si la profondeur maximale est atteinte, retourner `False`.
3. Générer l'enfant de gauche. S'il retourne `True`, retourner `True`.
4. Générer l'enfant de droite. Retourner ce qu'il retourne.

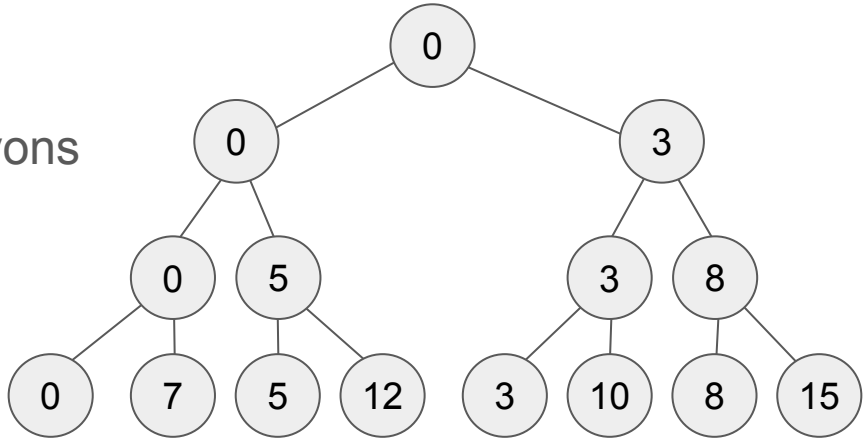
(Très adapté à une formulation récursive)

Exploration en profondeur de l'espace des solutions

Voici l'arbre complet, si on devait le construire.

Gardons en tête que, précisément, nous devons construire cet arbre !

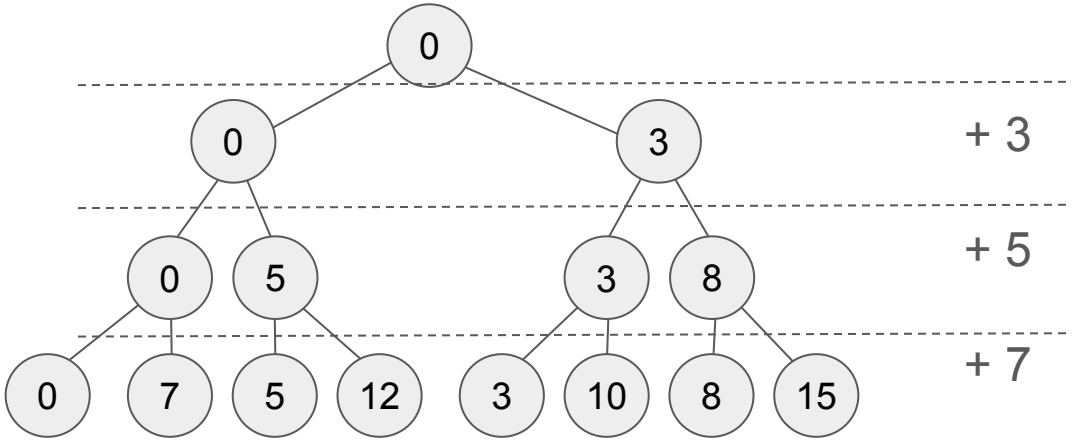
Dans cet exemple, E = [3, 5, 7]



Exploration en profondeur de l'espace des solutions

Voici l'arbre complet, si on devait le construire.

Dans cet exemple, E = [3, 5, 7]

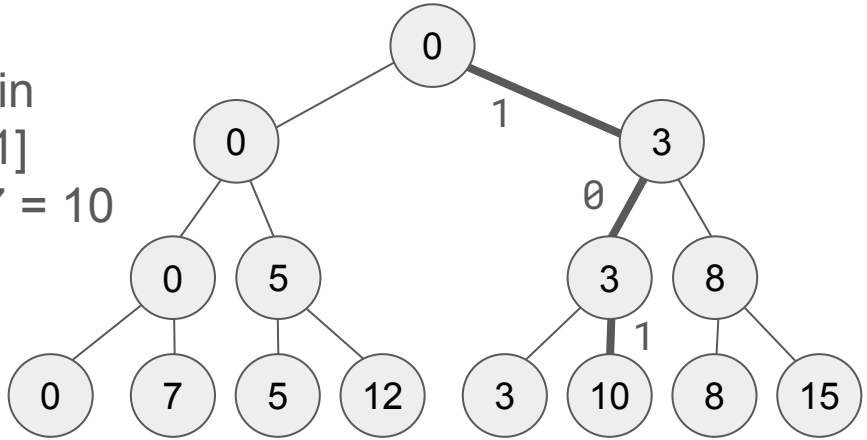


Exploration en profondeur de l'espace des solutions

Voici l'arbre complet, si on devait le construire.

Par exemple, ce chemin correspond à u = [1,0,1]
et donc à S = 3 + 0 + 7 = 10

Dans cet exemple, E = [3, 5, 7]



Recherche en profondeur | **Commentaires**

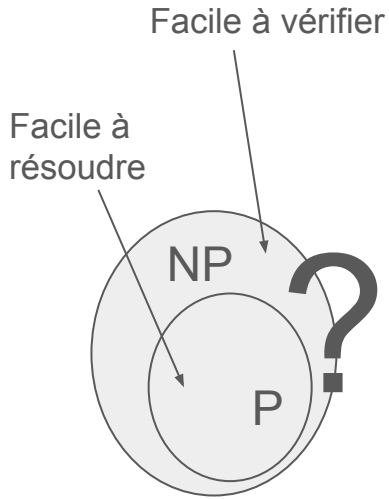
- De nombreux raffinements sont possibles selon les détails du problème. Par exemple, selon les contraintes sur E, on peut prédire à l'avance qu'une branche doit être abandonnée.
- De la même façon, on peut explorer l'ensemble des mots de passe de longueur donnée possibles, des parties d'échecs possibles, etc. Mais, en général, ces ensembles sont bien trop grands pour les ordinateurs même les plus puissants !
- Une recherche **exhaustive** est souvent nommée "approche **force brute**".

Recherche en profondeur | **Commentaires**

- La méthode qui vient d'être vue constitue une **recherche en profondeur**, ou DFS (*Depth-First Search*), car la priorité est systématiquement donnée aux nouveaux enfants avant l'exploration des noeuds frères.
- Comme la recherche est exhaustive, on a la garantie de trouver une solution s'il en existe une.
- Il existe d'autres méthodes, comme la recherche en largeur ou BFS (*Breadth-First Search*), qui est également exhaustive mais garantit de trouver la solution la plus courte (ici, le sous-ensemble le plus restreint).

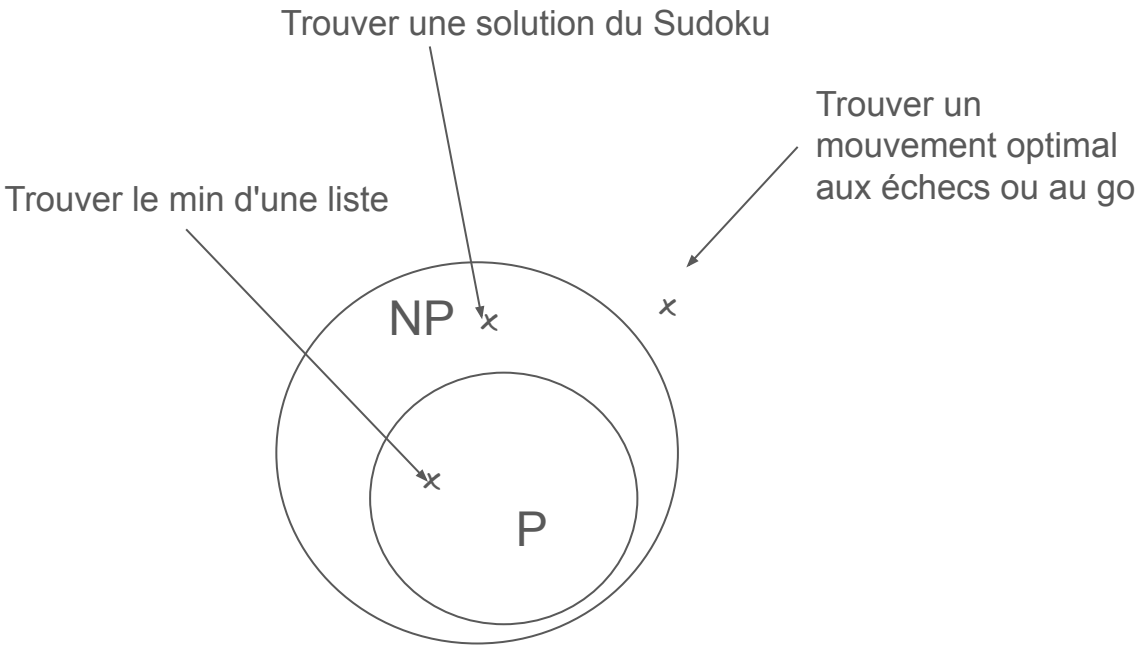
Commentaires sur les problèmes "difficiles" à résoudre

- Solution **difficile à trouver** : $O(2^n)$ solutions à tester. (Cf. Code d'exemple)
- Dans ce cas, solution **facile à vérifier** : $O(n)$.
- Les problèmes de décision faciles à vérifier (complexité polynomiale) sont classés comme problèmes "NP".
- Les problèmes de décision à la fois difficiles à résoudre mais faciles à vérifier sont dits "NP-complets".
- Les problèmes faciles à résoudre (P) sont forcément faciles à vérifier (NP), donc P est inclus dans NP.
  Mais la réciproque, qui implique P = NP, est-elle vraie ?



(Diapositive hors champ)

Commentaires sur les problèmes "difficiles" à résoudre



(Diapositive hors champ)

Commentaires sur les problèmes "difficiles" à résoudre

- Classer un problème dans P ou dans NP dépend du meilleur algorithme connu. C'est une chose qui peut changer avec les progrès. Par exemple, dans ce cours nous avons d'abord cru que le tri était $O(n^2)$ avant de voir qu'il était $O(n \log(n))$.

- On n'a jamais réussi à trouver un problème facile à **vérifier** dont on puisse prouver qu'il ne puisse pas être **résoluble** mieux qu'exponentiellement ! Il suffirait d'en trouver un pour montrer que P ≠ NP.

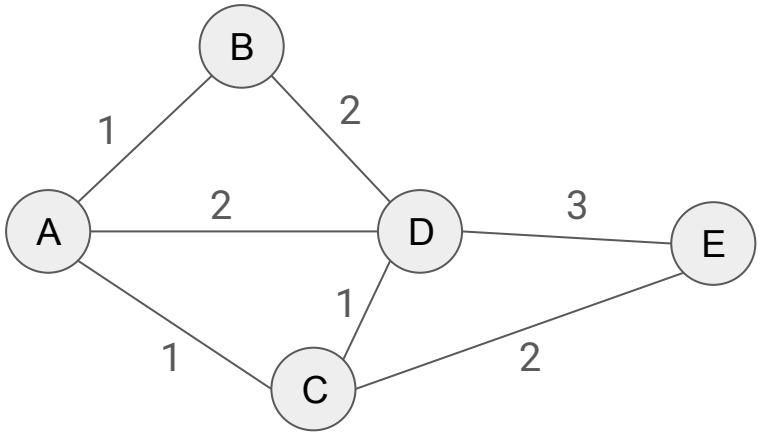
- On a pu démontrer que tous les problèmes NP-complets sont en fait des formulations différentes d'un même problème (SAT) ⇒ on peut aussi essayer de trouver un algo de résolution polynomiale d'un problème NP-complet, car cela prouverait que P = NP.

(Diapositive hors champ)

Recherche de plus court chemin

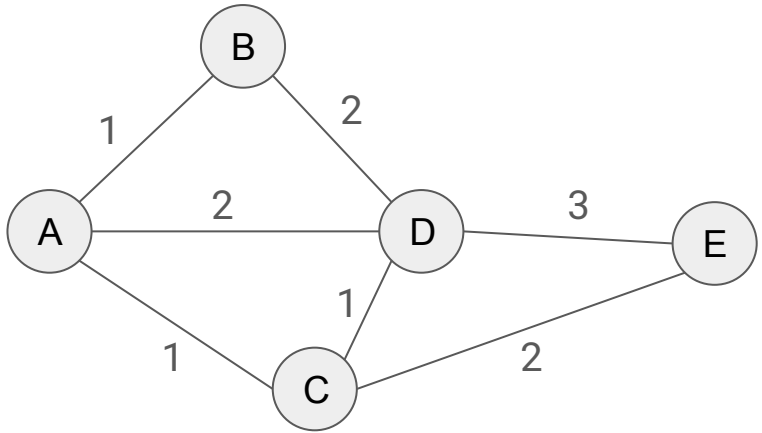
Des villes sont reliées par des routes. Le temps mis pour joindre deux villes *via* une route dépend de la route.

Partant de A, quel est le plus court chemin pour aller à E ?



Recherche de plus court chemin

- La structure mathématique que nous utilisons ici est un **graphe** dont les noeuds sont des villes, et les arêtes des routes.
- Le graphe est **non orienté** : les routes peuvent être prises dans les deux sens.
- Le graphe est **pondéré** : chaque route est associée à un certain poids.
- La solution au problème est une séquence de noeuds.



Comment implémenter une structure de graphe ?

- Tout comme pour les arbres, il existe plusieurs implémentations dont la pertinence dépend de la situation.
- Si le graphe est dense, alors il est bon de le décrire *via* sa matrice d'adjacence, qui est telle que M_{ij} = 1 si les noeuds i et j sont connectés, 0 sinon.
- Si le graphe est peu dense, il peut être intéressant de l'implémenter *via* une variante de liste chaînées.
- Ici, on ne s'intéresse pas à l'implémentation exacte, mais juste aux algorithmes exploitant la structure mathématique de graphe.

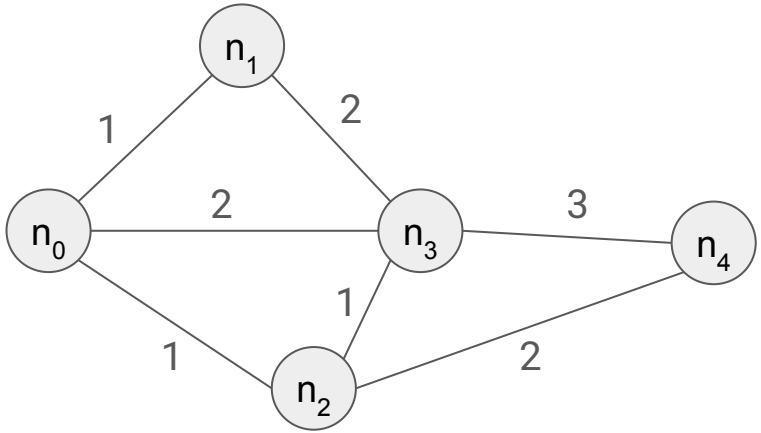
Matrice d'adjacence

- On peut même définir que le poids de l'arête connectant i et j vaut M_{ij}.
- Exemple pour n = 5 noeuds :
- En général, on définit $M_{ii} = 0$.
- Si le graphe est non orienté, on aura $M_{ij} = M_{ji}$, c'est-à-dire que la matrice est symétrique par rapport à la diagonale.
- Exemple sur le graphe des diapos précédentes :

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	M_{00}	M_{01}	M_{02}	M_{03}	M_{04}
1	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}
2	M_{20}	M_{21}	M_{22}	M_{23}	M_{24}
3	M_{30}	M_{31}	M_{32}	M_{33}	M_{34}
4	M_{40}	M_{41}	M_{42}	M_{43}	M_{i44}

Matrice d'adjacence

Exemple pour notre graphe : M = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & \infty \\ 1 & 0 & \infty & 2 & \infty \\ 1 & \infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$



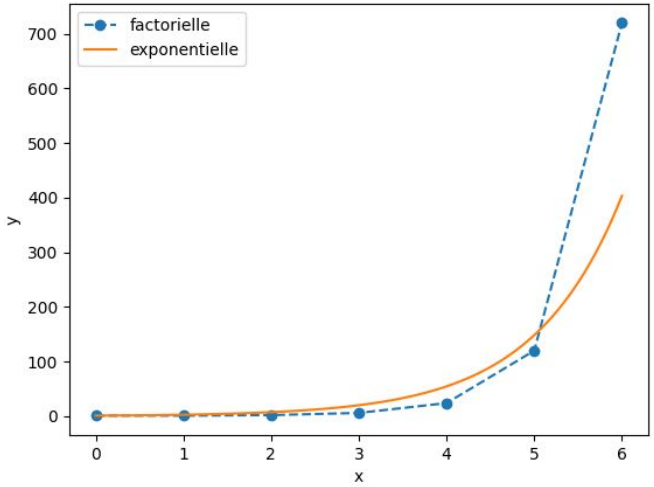
	n_0	n_1	n_2	n_3	n_4
n_0	0	1	1	2	∞
n_1	1	0	∞	2	∞
n_2	1	∞	0	1	2
n_3	2	2	1	0	3
n_4	∞	∞	2	3	0

Algorithme de plus court chemin naïf

- Tester tous les chemins possibles de A à E, et garder le plus court.

- Combien y a-t-il de chemins possibles ?
  Pire des cas : chaque noeud est relié à tous les autres.
  Dans ce cas, il existe **n!** chemins possibles pour aller de A à E.

- La complexité d'un algorithme naïf est donc **particulièrement défavorable**.



Algorithme de Dijkstra | **Idée générale**

- L'algorithme construit, **pour un noeud de départ A donné**, le meilleur chemin vers chacun des autres noeuds.
- On associe à chaque noeud une **distance** depuis le noeud A. On associe également à chaque noeud un noeud **prédécesseur**.
- On maintient une liste des noeuds déjà **visités**. À chaque fois qu'on visite un noeud N, on regarde si depuis là on peut améliorer le score des voisins pas encore visités. Si on peut améliorer le score d'un voisin, alors son nouveau prédécesseur est le noeud N.
- Le prochain noeud à visiter est celui qui possède le plus petit score, parmi les noeuds pas encore visités.
- Pour reconstruire le chemin depuis un noeud, on "remonte" de prédécesseur en prédécesseur.

Algorithme de Dijkstra

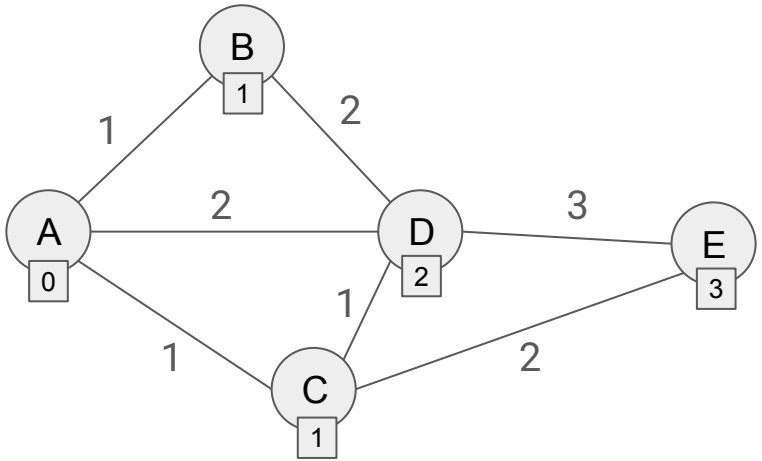
1. visites = []
2. prédécesseur[i] = ∅ pour tout noeud i
3. dist[i] = ∞ pour tout noeud i
4. dist[0] = 0
5. Tant que length(visites) ≠ n:
    a. N = nœud hors de visites avec le plus petit score
    b. On insère N dans visites
    c. Pour chaque voisin V de N, si V ∉ visites:
        c.1 Si dist[V] > dist[N] + M_{NV}:
            c.1.1 dist[V] = dist[N] + M_{NV}
            c.1.2 prédécesseur[V] = N

(Diapositive hors champ)

Algorithme de Dijkstra | **Exemple pas à pas**

Cf. slides d'illustration pas à pas

Noeud	A	B	C	D	E
Score	0	1	1	2	3
Prédécesseur	∅	A	A	A	C



Algorithme de Dijkstra | **Complexité naïve**

```
Tant que length(visites) ≠ n: O(n)
    N = nœud hors de visites avec le plus petit score O(n)
    On insère N dans visites O(n)
    Pour chaque voisin V de N, si V ∉ visites: O(n)
        Si dist[V] > dist[N] + M_NV: O(1)
            dist[V] = dist[N] + M_NV O(1)
            prédécesseur[V] = N O(1)
```

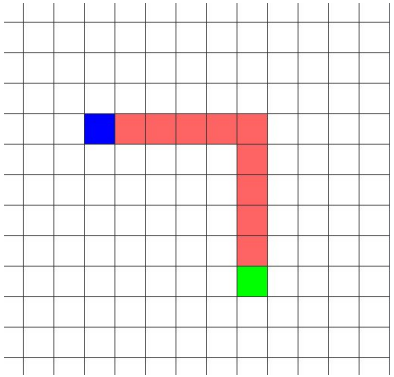
O(1) si l'on utilise la bonne structure

Algorithme de Dijkstra | **Commentaires finaux**

- Des variantes de l'algorithme, où certaines structures (*priority queues*) sont utilisées à bon escient, sont $O(E \log(V))$, avec E le nombre d'arêtes et V le nombre de sommets.
- La complexité de la version discutée ici, où `visites` et `dist` sont des tableaux de valeurs, est $O(n^2)$.
- Dijkstra est similaire à une recherche en largeur.

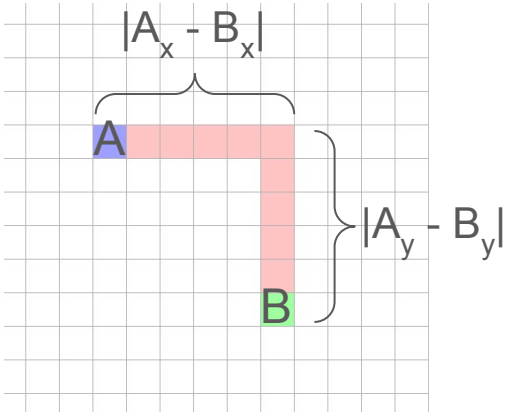
Algorithme de plus court chemin sur une grille (A*)

- Lorsque le chemin est à choisir parmi un **ensemble de cases adjacentes** (par exemple dans un labyrinthe ou sur un "échiquier"), on peut améliorer l'algorithme de Dijkstra en raison de la structure régulière du graphe sous-jacent.
- On introduit une **heuristique** qui **guide** la recherche : les noeuds proches de la destination en terme de **distance** sont alors favorisés. Cette distance est facilement calculable.
- Dans la suite et par souci de simplicité, on se restreint au cas où l'on peut bouger uniquement sur l'axe Nord-Sud et Est-Ouest, pas les diagonales.



A* | **Idée générale**

- On introduit une **heuristique** qui **guide** la recherche : les noeuds dont la distance "physique" est proche de la destination sont alors favorisés. Cette distance est facilement calculable.
- Exemple avec la "distance de Manhattan" :
  $d(A,B) = |A_x - B_x| + |A_y - B_y|$
- Les noeuds à visiter en **priorité** sont ceux qui rapprochent "physiquement" du but.
- Le chemin est optimal si l'heuristique est "optimiste", (*i.e.* elle sous-estime ou égale toujours la véritable distance).



A* | **Différence avec Dijkstra**

1. ~~visites = []~~ (il est possible de visiter plusieurs fois le même noeud)
2. prédécesseur[i] = ∅ pour tout noeud i
3. dist[i] = ∞ pour tout noeud i
4. dist[0] = 0
5. ~~Tant que length(visites) ≠ n:~~ (tant qu'on n'est pas arrivé à destination)
    a. N = nœud hors de visites avec le plus petit score
    b. ~~On insère N dans visites~~
    c. Pour chaque voisin V de N, ~~si V ∉ visites:~~
        i. Si dist[V] > dist[N] + M_{NV}:
            1. dist[V] = dist[N] + M_{NV}
            2. prédécesseur[V] = N

A* | **Pseudocode**

```
N = depart
candidats = []
Tant que dist(N, arrivee) ≠ 0:
    enfants = construire_enfants(case_visitee)
    ajouter enfants aux candidats
    Si candidats est vide:
        afficher("Pas de solution")
        retourner ∅
    N = candidat avec le plus petit score
retourner N
```

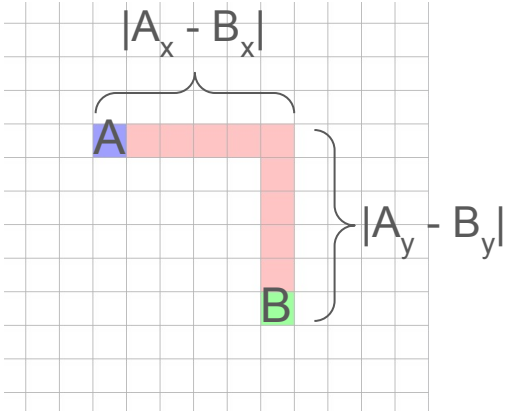
A* | **Pseudocode**

```
N = depart
candidats = []
meilleur_distance = {}
score = {}
Tant que dist(N, arrivee) ≠ 0:
    Pour chaque voisin V de N:
        nouvelle_dist_a_depart = dist_a_depart[N] + 1
        Si nouvelle_dist_a_depart < meilleur_distance[V]
            meilleur_distance[V] = nouvelle_dist_a_depart
            score[V] = nouvelle_dist_a_depart + manhattan(V, arrivee)
            ajouter V aux candidats
    Si candidats est vide:
        afficher("Pas de solution")
        retourner ∅
    N = candidat avec le plus petit score
retourner N
```

construire_enfants( )

A* | **Commentaires finaux**

- Pire des cas *O*(E log(V)), avec E le nombre d'arêtes et V le nombre de sommets.
- En pratique, très performant dans de nombreux problèmes.
- Dijkstra parcourt nécessairement tous les noeuds ; A* ne parcourt que les noeuds vers lesquels l'heuristique guide.



Algorithmes branch-and-bound

- Nommons :
  - L(n) le coût effectif pour passer de l'état initial n_i à l'état n
  - H(n) le coût estimé (heuristique) pour passer de l'état n à l'état solution n_f, et $H(n_f) = 0$ si n_f est un noeud solution.
  - R(n) le coût réel pour passer de l'état n à l'état solution n_f.
- Famille d'algorithmes branch-and-bound : un coût C(n) = L(n) + H(n) est associé à chaque noeud n produit. On explore toujours en priorité le noeud de coût moindre parmi tous les noeuds existants.
- On peut démontrer que si H(x) est optimiste, c'est-à-dire que $H(n) \leq R(n) \ \forall \ n$, alors l'algorithme trouve nécessairement l'une des solutions optimales.

(Diapositive hors champ)

Optimalité de A*

- On se restreint au cas de A* sur une grille 2D avec déplacements unitaires le long des axes et une heuristique distance de manhattan : $H(n) = |n_x - n_{fx}| + |n_y - n_{fy}|$.
  Dans ce cas, $L(n) = |P_{i \to n}|$ pour un chemin P.
- Conséquence de H(n) : $C(n) = |P_{i \to n}| + H(n) \leq |P| \ \forall \ n \in P$, puisque $|P_{i \to n}| \leq |P|$ et $H(n) \leq R(n)$.
- Supposons un chemin optimal P et un chemin sous-optimal Q : $|P| < |Q|$.
- Supposons que l'état m du chemin sous-optimal $Q = [n_i, \ldots m]$ soit une solution.
- L'état m est rangé dans la file de priorité en fonction de son coût C(m) = L(m) + H(m), mais comme H(m) = 0 pour une solution, alors C(m) = |Q|
- Comme $C(n) \leq |P| < |Q| \ \forall \ n \in P$, l'état de coût C(m) ne sera pas exploré tant qu'il existe un noeud non exploré du chemin optimal.

(Diapositive hors champ)

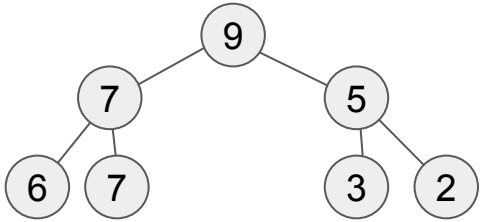
Les files de priorité

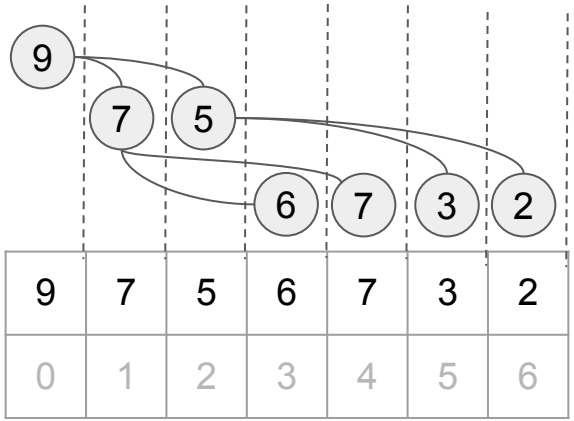
- Que ce soit dans l'algorithme de Huffman, Dijkstra ou A*, nous avons mentionné le fait que maintenir une "file de priorité" permet d'obtenir la meilleur complexité.
- File de priorité : type abstrait dans lequel on peut insérer un élément ou retirer l'élément le plus prioritaire (disons : valeur la plus haute).
- L'une des façons les plus courantes d'implémenter une file de priorité : au travers d'un arbre binaire nommé "tas".

Les tas

- Le tas pourrait être un tableau dynamique construit au fur et à mesure en utilisant une recherche dichotomique pour trouver l'indice d'insertion des nouveaux éléments, mais la complexité d'insertion est O(n).
- Il y a mieux à faire : maintenir un **arbre binaire** qui respecte un certain lien systématique entre parents et enfants (comme l'arbre de recherche binaire).
- Cet arbre devra être **implémenté comme un tableau**, et l'ajout d'une feuille devrait correspondre à l'opération append afin de ne pas avoir à insérer d'éléments au milieu du tableau.

Arbre implémenté comme tableau





Valeurs	9	7	5	6	7	3	2
Indices	0	1	2	3	4	5	6

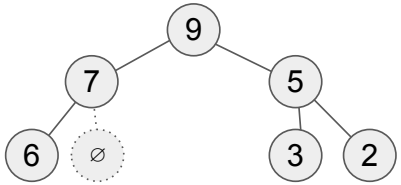
Lien entre indice i d'un parent et indices j_g et j_d des enfants:

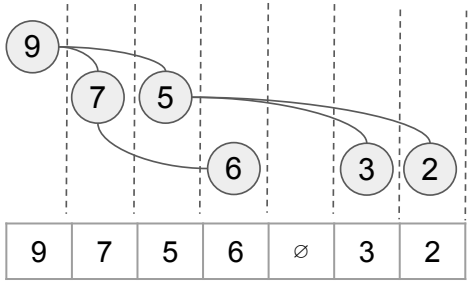
$j_g = 2i + 1, \quad j_d = 2i + 2, \; i = \text{int}((j-1)/2)$

Garder un arbre quasi-complet

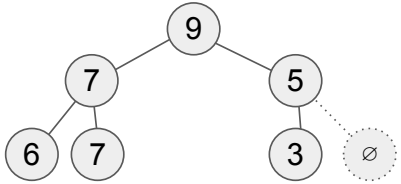
L'arbre doit rester quasi-complet, et pour cela on fixe une règle : quand le dernier étage est incomplet, toutes les feuilles sont contiguës. Ainsi, on peut tout de suite savoir à partir du tableau représentant l'arbre où est le dernier "trou".

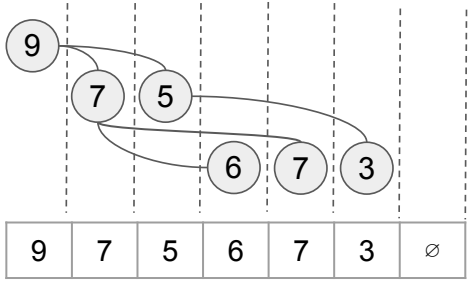
Arbre implémenté comme tableau | **Trous**





Pas acceptable



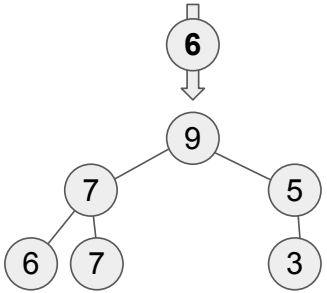


Acceptable

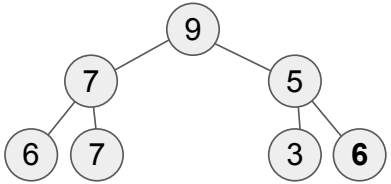
Propriété du tas max (*max-heap*)

- Un enfant ne doit jamais être de valeur strictement supérieure à un parent.
- Ainsi, la racine est forcément l'élément de priorité maximale.
- Quand on ajoute un noeud, on le range dans la prochaine feuille libre puis on le fait "remonter" jusqu'à ce que la propriété soit respectée.
- Quand on retire la racine, on y met la dernière feuille qu'on fait ensuite "redescendre" jusqu'à ce que la propriété soit respectée.
- Chacune de ces opérations est O(log(n))

Insertion d'un nouvel élément

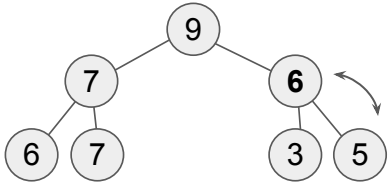


Etape 1



Etape 2

Ranger dans la prochaine feuille libre



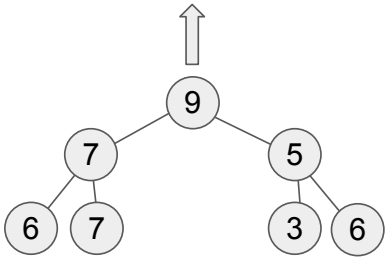
Etape 3

Faire "remonter" pour respecter la propriété max

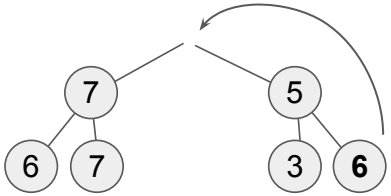
Insertion d'un nouvel élément

```
def ajoute_tas(tas, element):
    i = len(tas)
    tas.append(element) #ajoute l'élément tout à la fin
    while i > 0:
        ip = indice_parent(i)
        if tas[ip] < tas[i]: #ne respecte pas la propriete de tas
            swap(tas, i, ip)
            i = ip #prochaine iteration sur le parent
        else:
            break
```

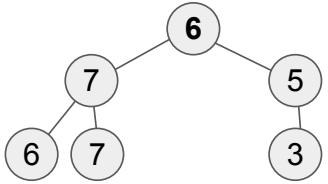
Extraction



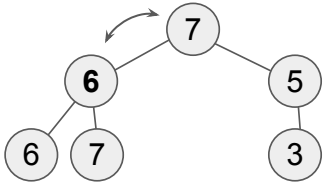
Etape 1
Ôter la racine

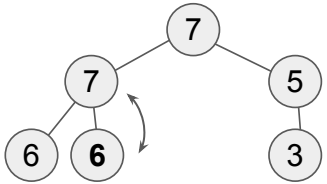


Etape 2
Dernière feuille est la nouvelle racine



Etape 4
Swapper la "racine" avec le plus grand enfant jusqu'à respecter la propriété.





Heap sort

- **Construire** un tas à partir d'une séquence : O(n log(n))
- Successivement **extraire** le noeud de priorité maximale et le ranger dans la nouvelle séquence : O(n log(n)).