Introduction à l'informatique

pour les mathématiques, la physique et les sciences computationnelles

Yann Thorimbert

Partie 2 | Chapitre 1
Structures de données

Yann Thorimbert

Chapitres du cours (seconde partie du cours)

0. Introduction

1. Structures de données : tableaux, listes et dictionnaires ←

2. Algorithmes de tri

3. Algorithmes de recherche au sein d'une séquence

4. Algorithmes sur graphes

Les types de données

- En programmation, on effectue un traitement sur des données de différentes natures.

- La nature de ces données, au sein d'un langage, est nommée **type**.

- Exemples parmi d'autres (le nom du type dépend du langage) :
  - Entier naturel stocké sur 16 bits.
  - Entier relatif stocké sur 32 bits.
  - Nombre à virgule flottante stocké sur 32 bits.
  - …

Types numériques

- Les types d'entiers et de flottants sont des types fondamentaux.
- Des circuits électroniques peuvent réaliser des opérations directement sur eux (exemple : additionneur).
- Python : `int`, `float` (avec une couche logicielle qu'on ignore ici)
- Matlab : `double`, `single`, `int8`, `int16`, …, `int64`, `uint8`, …, `uint64`.

Mémoire allouée au processus

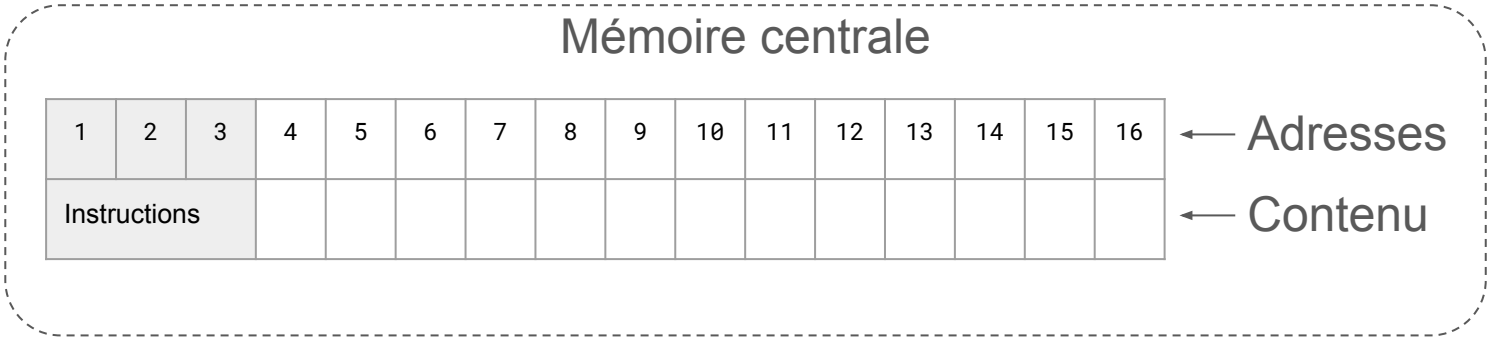
Quel est le lien entre :

- le code du programme,
- le type des variables impliquées,
- le stockage des séquences de bits correspondantes dans la mémoire ?

Mémoire allouée au processus | **Exemple simplifié**

Le processus commence : seule les instructions elles-même occupent de la place en mémoire.

Pour des raisons de place, nous imaginons qu'il suffit de 3 octets pour stocker les instructions du programme.



Mémoire allouée au processus | **Exemple simplifié**

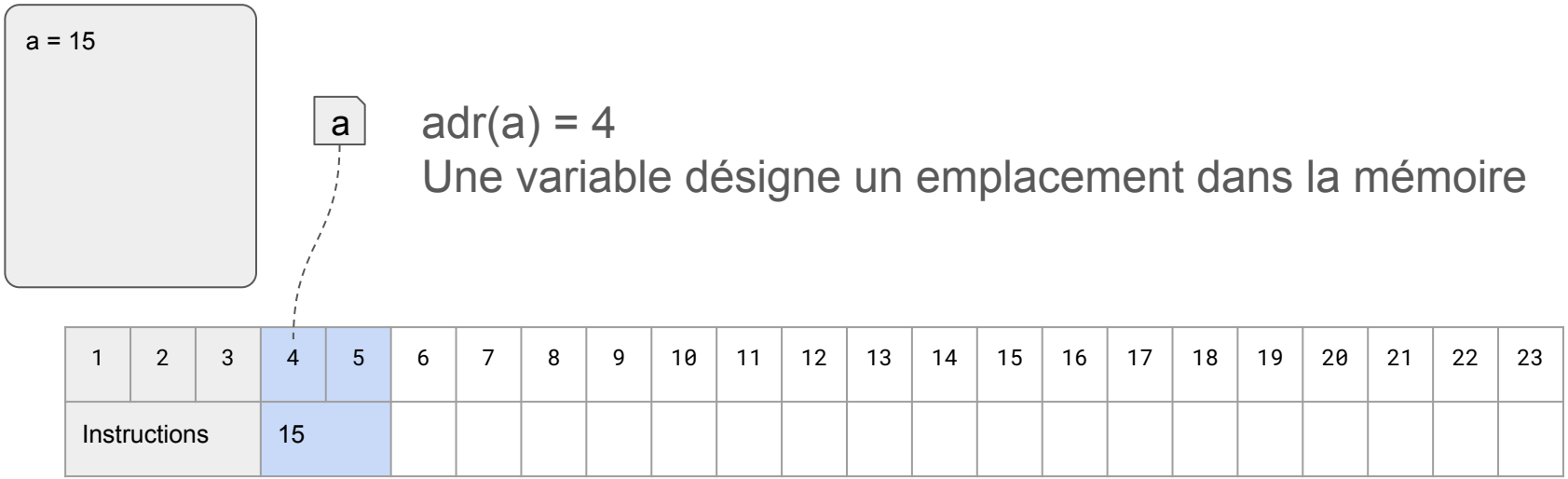
Un entier est déclaré (disons sur 2 octets pour l'exemple).

a = 15

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Instructions			15																			

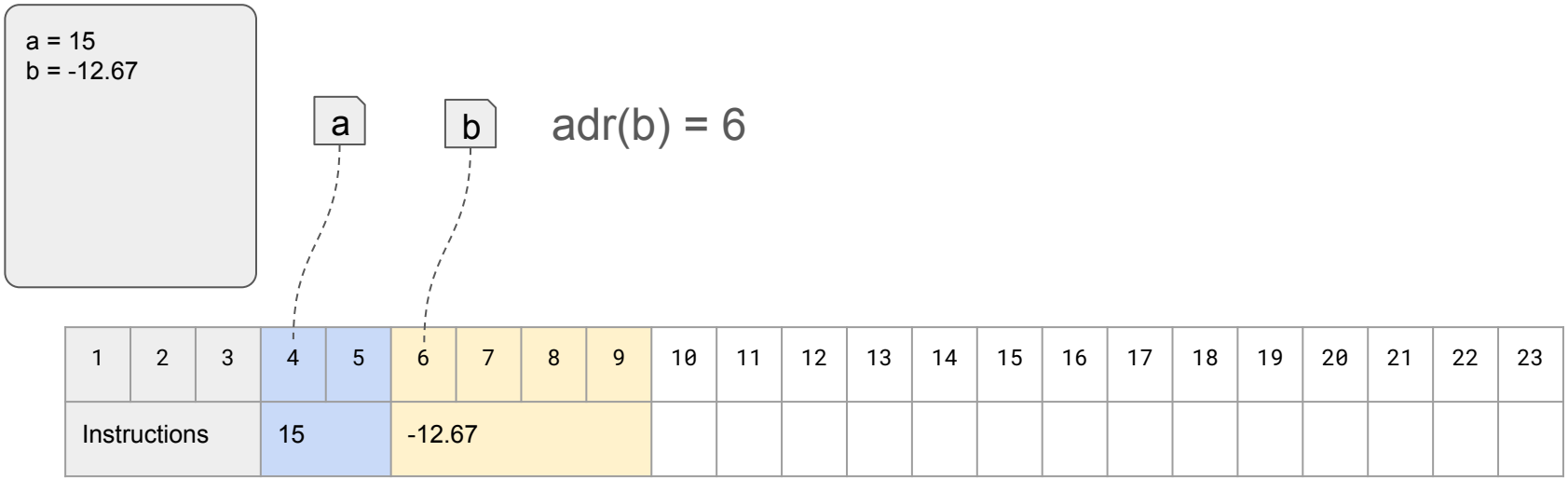
Mémoire allouée au processus | **Exemple simplifié**

Un entier est déclaré (disons sur 2 octets pour l'exemple).



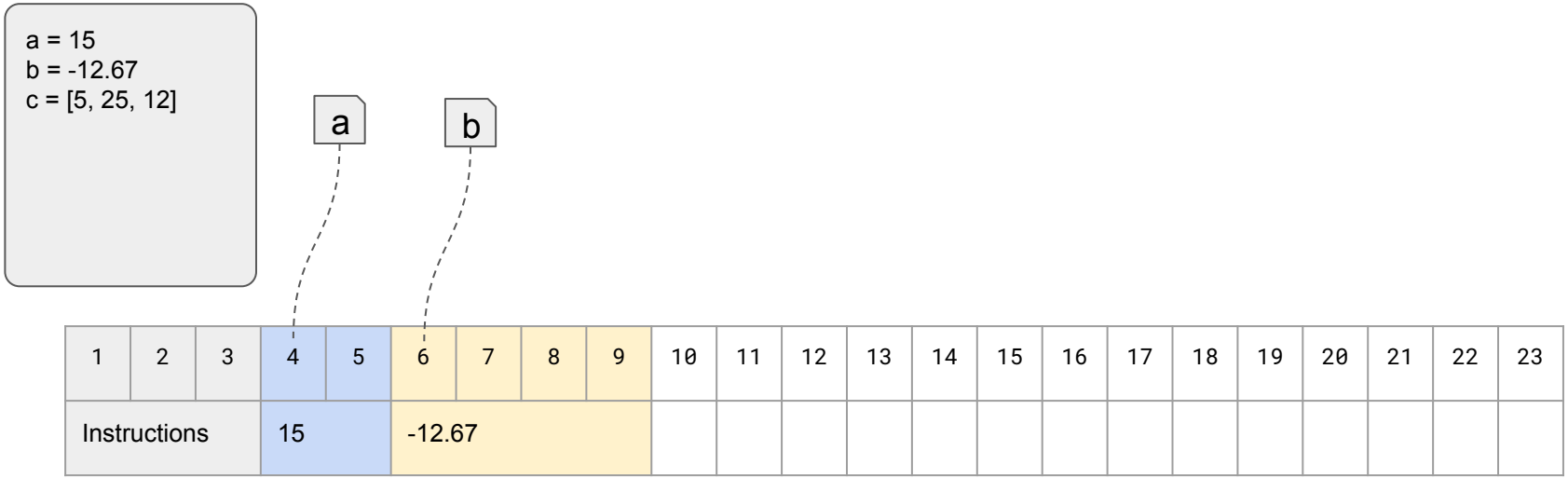
Mémoire allouée au processus | **Exemple simplifié**

Un float est déclaré (4 octets)



Mémoire allouée au processus | **Exemple simplifié**

Une séquence de 3 entiers est déclarée ⇒ À quoi cela correspond-il ?



Tableaux de valeurs

Tableaux de valeurs

- Rappel : dans la mémoire centrale, les données sont adressées de telle sorte que la donnée numéro *n* est voisine de la donnée *n* + 1.

- On peut exploiter cela pour créer un tableau de valeurs **contiguës** en mémoire.

Adresse	1	2	3	4	5	…
Contenu	`10101111`	`00101101`	`10111100`	`00000000`	`10111100`	…

Tableaux de valeurs

- Rappel : dans la mémoire vive, les données sont adressées de telle sorte que la donnée numéro *n* est voisine de la donnée *n* + 1.

- On peut exploiter cela pour créer un tableau de valeurs **contiguës** en mémoire.

- Dans les langages de bas niveau, on peut directement incrémenter l'adresse d'une variable pour accéder à sa voisine.

- Les `array` de MATLAB et les `list` de python exploitent cela.

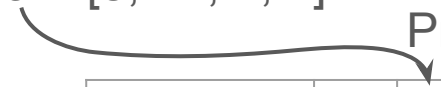
Tableaux de valeurs

a = [8, 12, 1, 7]

Adresse	…	**156**	**157**	**158**	**159**	160	…
Contenu	…	**00001000**	**00001000**	**0000001**	**00000111**	10111100	…

Tableaux de valeurs

a = [8, 12, 1, 7]



Adresse	…	**156**	**157**	**158**	**159**	160	…
Contenu	…	**00001000**	**00001000**	**0000001**	**00000111**	10111100	…

Tableaux de valeurs

a = [8, 12, 1, 7]

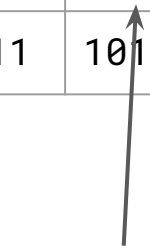
Adresse	…	156	157	158	159	160	…
Contenu	…	00001000	00001000	0000001	00000111	10111100	…

Ici, 156 à titre d'exemple

Tableaux de valeurs

a = [8, 12, 1, 7]

Adresse	…	156	157	158	159	160	…
Contenu	…	00001000	00001000	0000001	00000111	10111100	…



Hors du tableau

Tableaux de valeurs

a = [8, 12, 1, 7]

Adresse	…	156	157	158	159	160	…
Contenu	…	`00001000`	`00001000`	`0000001`	`00000111`	`10111100`	…

En réalité, les types entiers occupent souvent plus de 8 bits !
Dans ce cas, chaque "case" du tableau occupe plusieurs adresses.

Tableaux de valeurs

- Si le type de chaque valeur stockée occupe *k* octets : adr(*i*) = adr(*i*-1) + *k*.
  Ou encore : adr(*i*) = adr(*0*) + *k*·*i*.

- On doit donc mémoriser deux choses : adr(0) et *k*.

- Exemple où chaque valeur est codée sur 32 bits (4 octets) :

Adresse	…	156	157	158	159	160	161	162	163	…
Contenu	…	Première valeur				Seconde valeur				…

Tableaux de valeurs | **Note sur l'indexation**

- Dans certains langages comme MATLAB, le premier élément du tableau correspond à l'indice 1.
  Dans ce cas, adr(i) = adr(0) + $k \cdot (i-1)$.

- Dans d'autres langages comme C ou Python, le premier élément du tableau correspond à l'indice 0.
  Dans ce cas, adr(i) = adr(0) + $k \cdot i$.

Tableaux de valeurs | **Taille fixe**

- Pour que le tableau de valeurs vu précédemment fonctionne, il faut qu'une suite d'adresses ait été **allouée pour lui en mémoire**.

- Le plus probable est que les adresses suivantes soient utilisées par d'autres données du processus.

- Le tableau de valeurs vu jusqu'ici doit donc être de **taille fixe**, car s'il augmente de taille il empiète sur les données suivantes !
  ⇒ On doit mémoriser **trois** choses finalement : adr(0), *k* et *n*.

Tableaux de valeurs | **Autres commentaires**

- En MATLAB comme en Python, les tableaux sont de taille variable. Des ajustements (réallocation de mémoire) sont donc cachés au programmeur.

- En Python, le tableau est plutôt une liste, dont le comportement est différent (encourage davantage les insertions d'éléments).

Tableaux de valeurs | **Autres commentaires**

- En MATLAB comme en Python, les tableaux sont de taille variable. Des ajustements (réallocation de mémoire) sont donc cachés au programmeur.

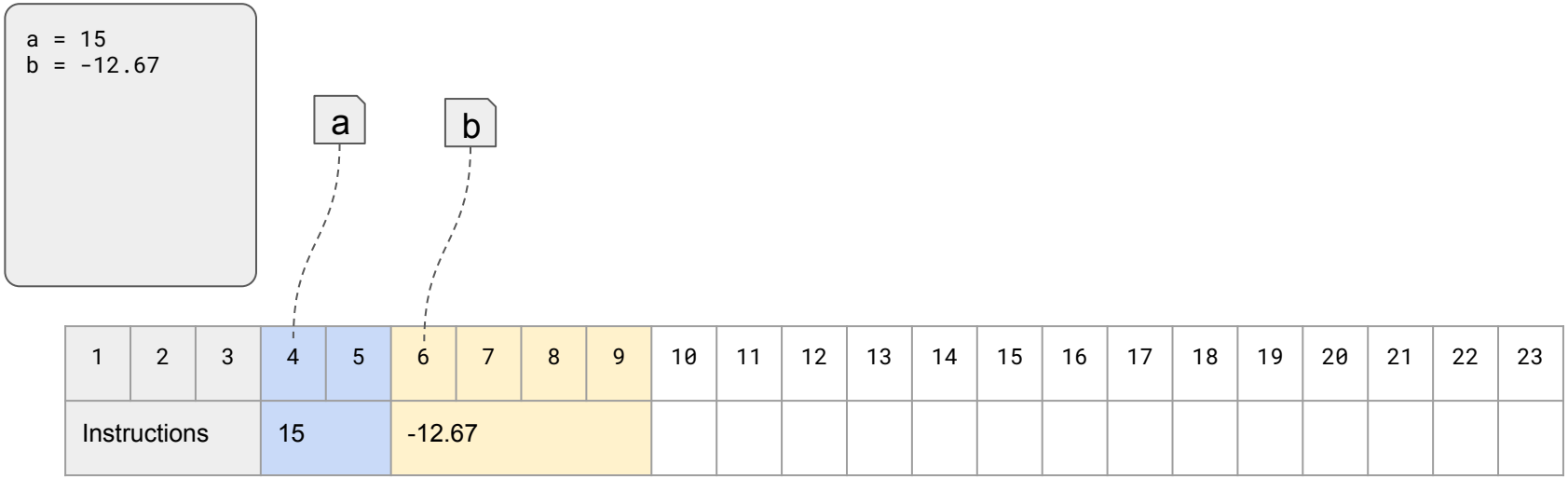
- En Python, le tableau est plutôt une liste, dont le comportement est différent (encourage davantage les insertions d'éléments).

- De plus, le type des valeurs d'une liste en Python donne l'impression d'être mixte (on peut mélanger différents types). Cela cache en réalité un tableau d'adresses d'autres variables !

  Une variable qui contient un nombre représentant une adresse de la mémoire est nommée un **pointeur**.

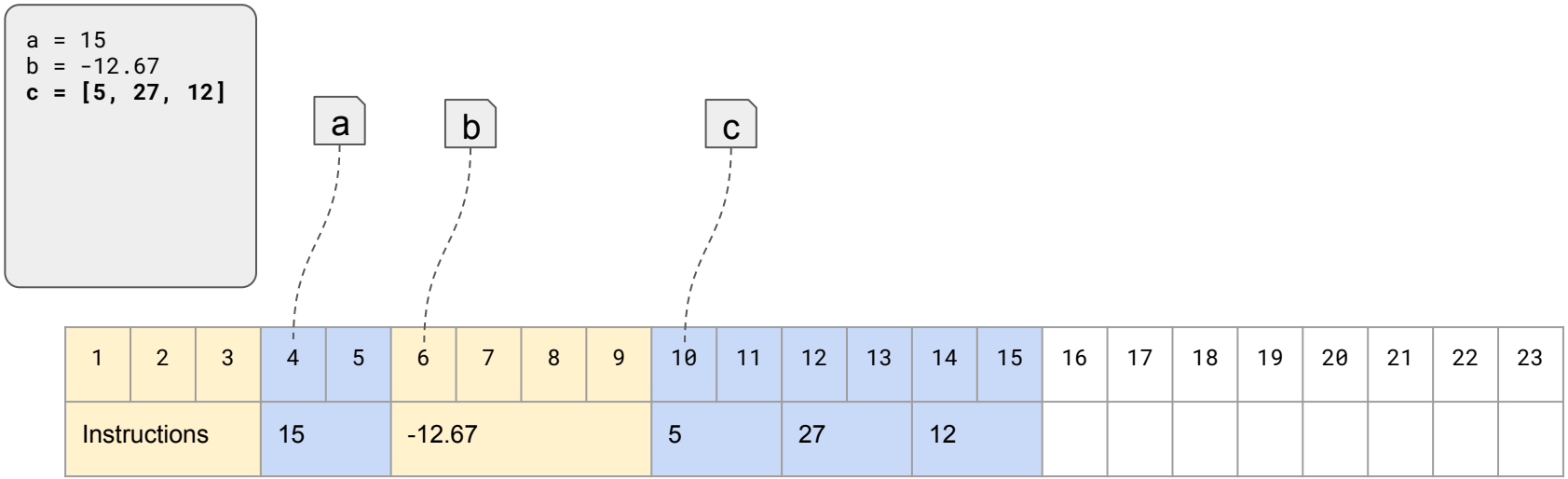
Mémoire allouée au processus | **Exemple simplifié**

Reprenons où nous en étions.



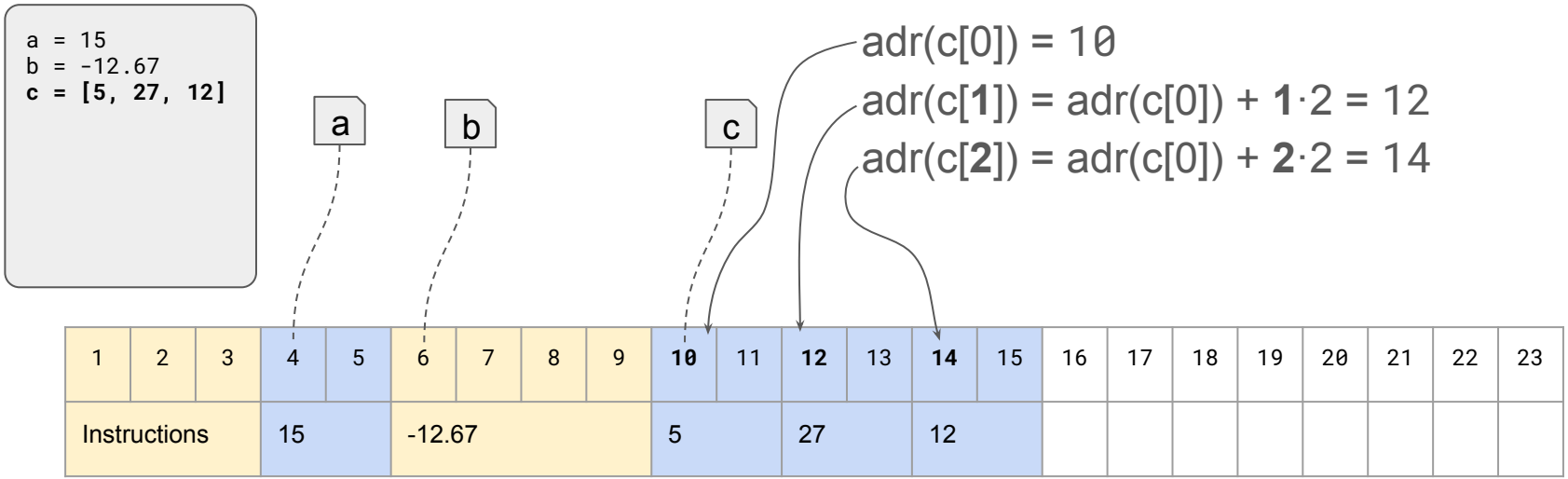
Mémoire allouée au processus | **Exemple simplifié**

Un tableau contenant 3 entiers (chacun codé sur 16 bits pour l'exemple).



Mémoire allouée au processus | **Exemple simplifié**

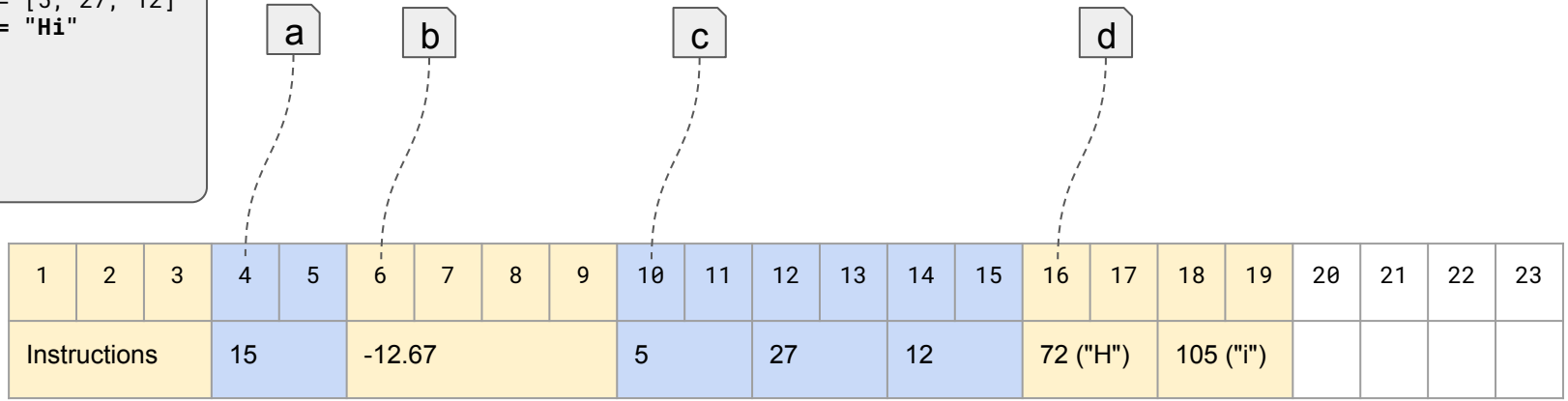
Un tableau contenant 3 entiers (chacun codé sur 16 bits pour l'exemple).



Mémoire allouée au processus | **Exemple simplifié**

Un tableau contenant 2 entiers (chacun codé sur 16 bits pour l'exemple).

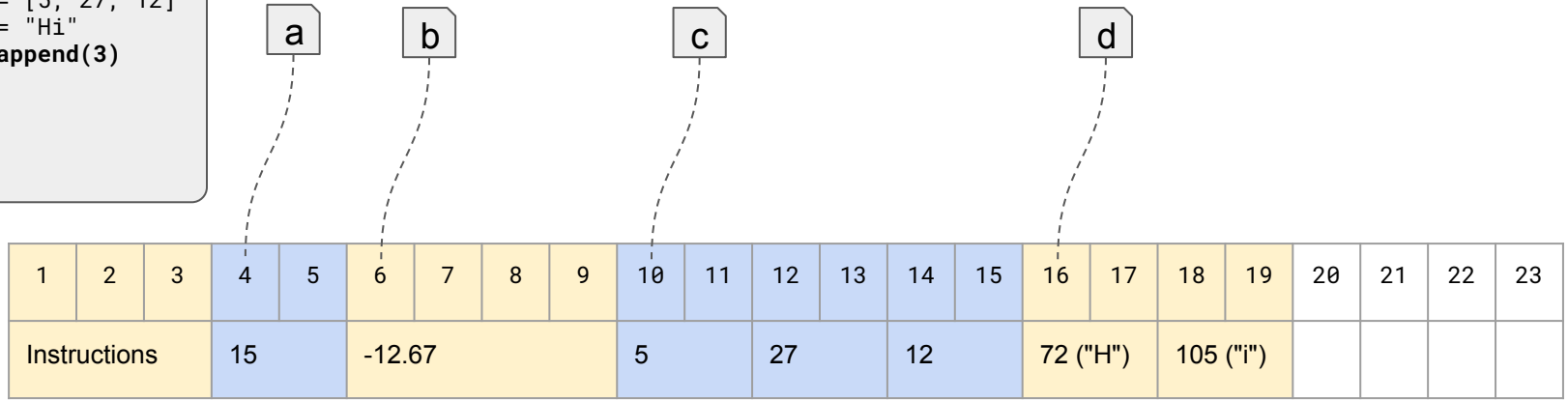
```
a = 15
b = -12.67
c = [5, 27, 12]
d = "Hi"
```



Mémoire allouée au processus | **Exemple simplifié**

Et si l'on veut ajouter une valeur au sein du tableau c ?

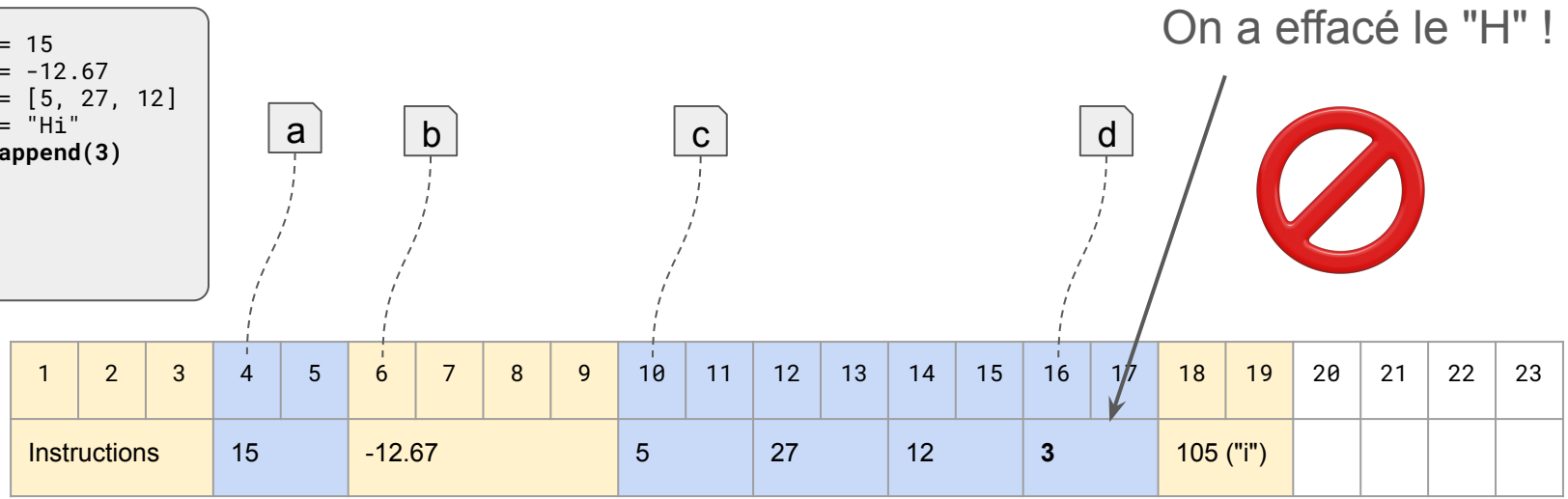
```
a = 15
b = -12.67
c = [5, 27, 12]
d = "Hi"
c.append(3)
```



Mémoire allouée au processus | **Exemple simplifié**

Et si l'on veut ajouter une valeur au sein du tableau c ?

```
a = 15
b = -12.67
c = [5, 27, 12]
d = "Hi"
c.append(3)
```



Tableaux de valeurs dynamiques

Retour aux tableaux | **Tableaux de taille variable**

- Pour que les tableaux de valeurs vus précédemment fonctionnent, il faut qu'une suite d'adresses ait été **réservée en mémoire**.

- Le plus probable est que les adresses suivantes soient utilisées par d'autres données du processus.

- Les tableaux de valeurs vus jusqu'ici sont donc de **taille fixe**.

- Comment réaliser un tableau de taille variable, aussi nommé **tableau dynamique** ?

Tableaux dynamiques | **Comportement**

- Contient une suite ordonnée de valeurs.
- `append(t, n)` a pour effet d'ajouter la valeur `n` à la fin du tableau `t`.
- `pop(t)` a pour effet de supprimer le dernier élément du tableau `t`.

Tableaux dynamiques | **Implémentation possible**

- Tout comme pour les tableaux statiques, on doit se souvenir de l'adresse de base `addr(0)` du tableau ainsi que du nombre k d'octets occupés par chaque valeur.

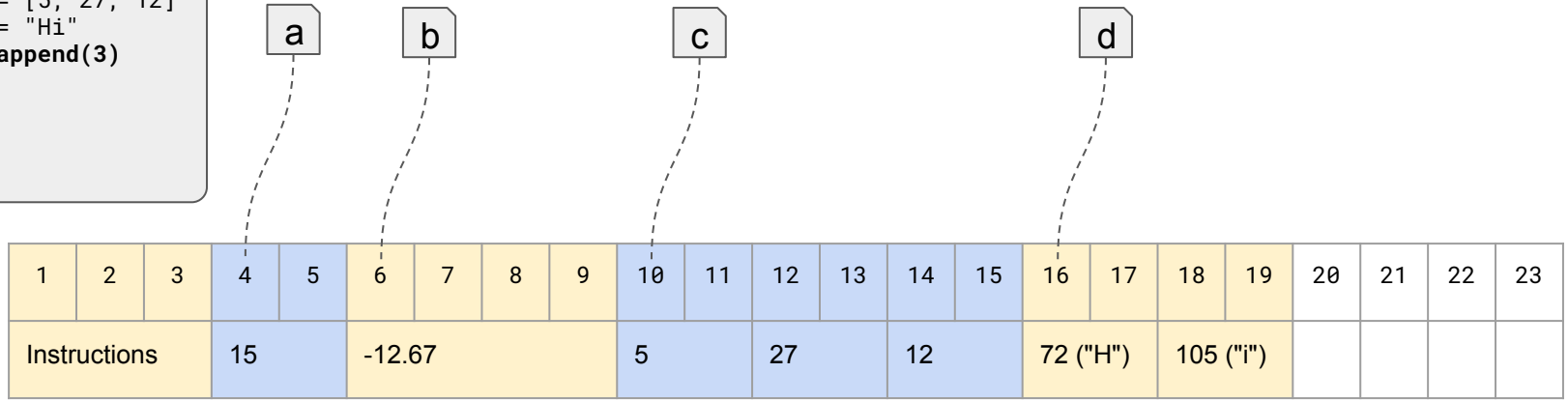
- Une façon commune de procéder est d'allouer une certaine capacité maximale `M` au tableau et de distinguer cette valeur du nombre d'éléments `L` réellement insérés au sein du tableau.

- À chaque fois que `append( )` est appelée, si `L = M - 1` on "déménage" le tableau ailleurs en mémoire (réallocation), en choisissant M plus grand.

Mémoire allouée au processus | **Exemple simplifié**

Et si l'on veut ajouter une valeur au sein du tableau c ?

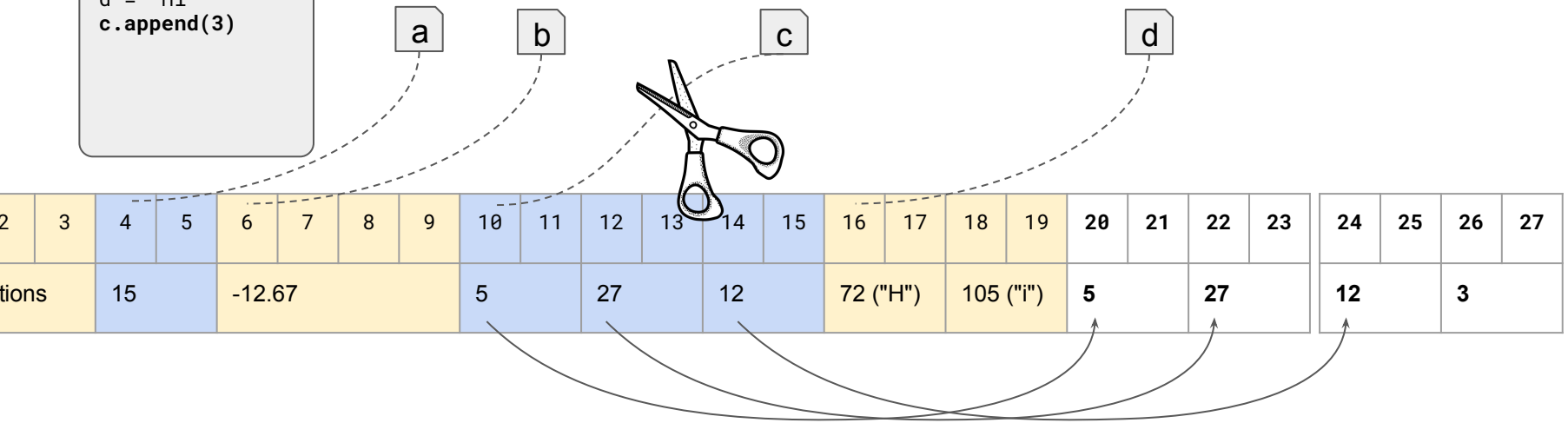
```
a = 15
b = -12.67
c = [5, 27, 12]
d = "Hi"
c.append(3)
```



Mémoire allouée au processus | **Exemple simplifié**

Réallocation de la mémoire nécessaire pour la "nouvelle version" de c en mémoire. Copie des valeurs.

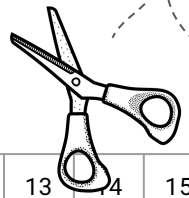
```
a = 15
b = -12.67
c = [5, 27, 12]
d = "Hi"
c.append(3)
```



Mémoire allouée au processus | **Exemple simplifié**

Libération de la mémoire qui était occupée par c dans sa "version précédente".

```
a = 15
b = -12.67
c = [5, 27, 12]
d = "Hi"
c.append(3)
```

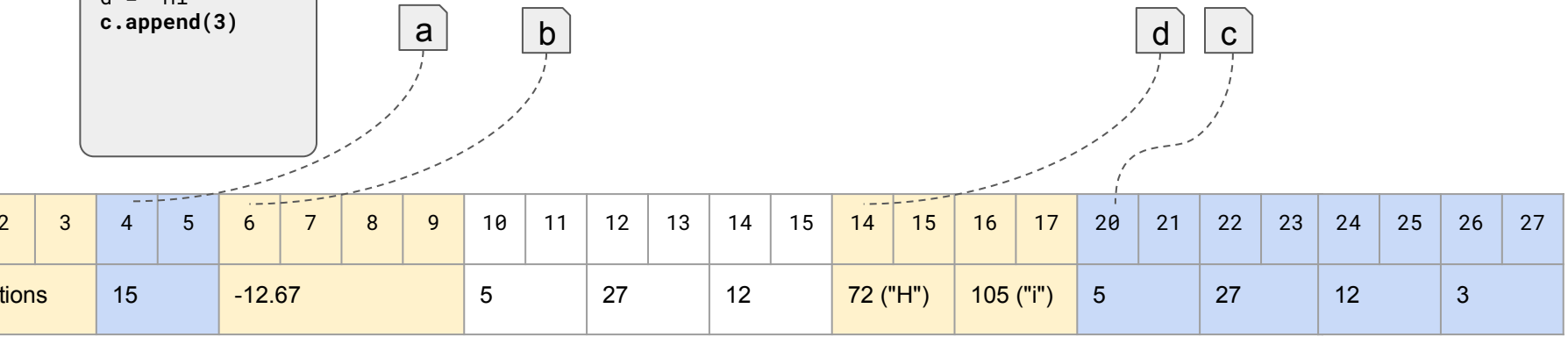


2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	14	15	16	17	20	21	22	23	24	25	26	27
tions		15		-12.67				5		27		12		72 ("H")		105 ("i")		5		27		12		3	

Mémoire allouée au processus | **Exemple simplifié**

Le "trou" est réutilisable, mais encore faut-il que les données à venir aient la place d'y rentrer. Pour l'instant, la mémoire est donc **fragmentée**.

```
a = 15
b = -12.67
c = [5, 27, 12]
d = "Hi"
c.append(3)
```



Tableaux | **Avantages et inconvénients**

👍 Tableau statique 👎

Rapide d’accès	Nombre fixe d’éléments
Compact en mémoire	

👍 Tableau dynamique 👎

Rapide d’accès	Mal adapté (lent) si la taille change fréquemment
Nombre variable d’éléments	Potentiel gaspillage de mémoire

Tableaux en MATLAB et Python

- En MATLAB : `array`.
- En Python : `NumPy array`.

  (le cas de `list` est à part)

Liste chaînée

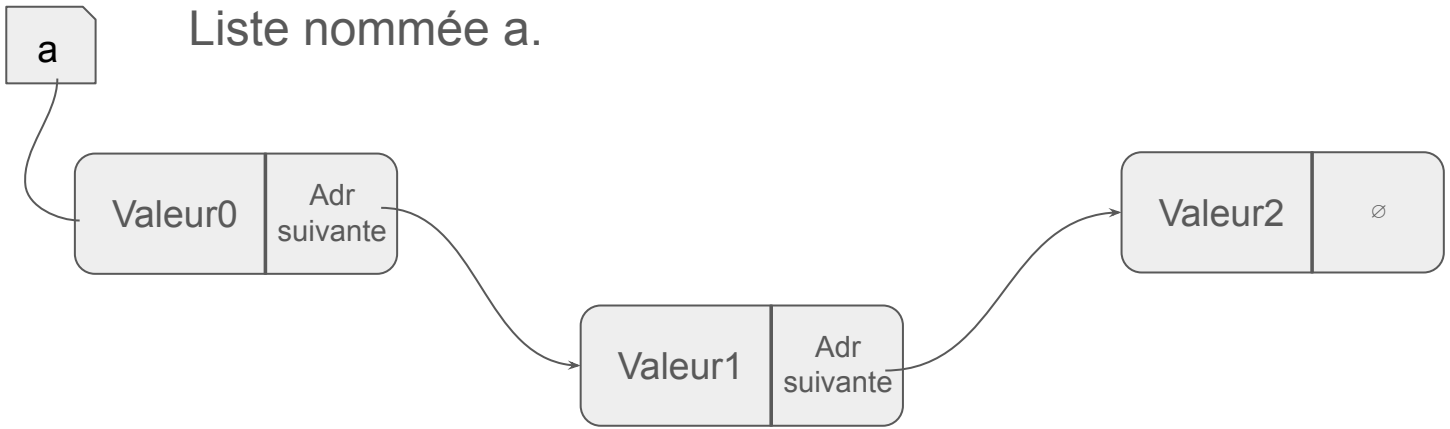
Liste chaînée | **Pourquoi s'y intéresser ?**

- Si non seulement la taille d'un tableau est amenée à varier, mais qu'en plus celle-ci varie **fréquemment**, les réallocations de mémoire du tableau dynamique peuvent devenir trop handicapantes.

- Exemples :
  - Lignes ou bouts de texte au sein d'un logiciel de traitement de texte (insertions et suppressions très fréquentes).

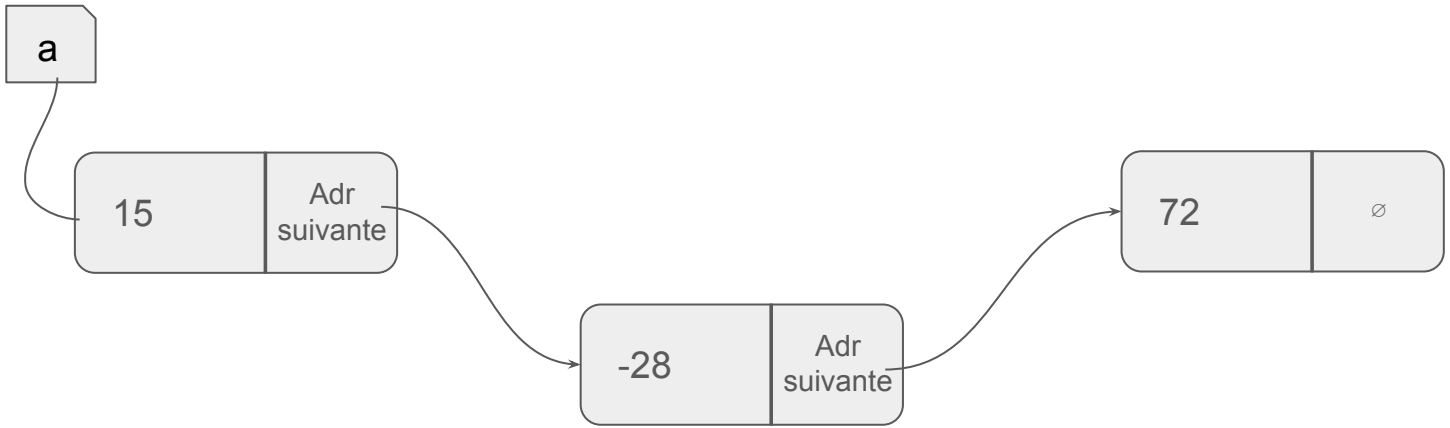
  - Historique des actions dans un navigateur, dans un logiciel, dans un jeu.

Liste chaînée | **Visualisation**

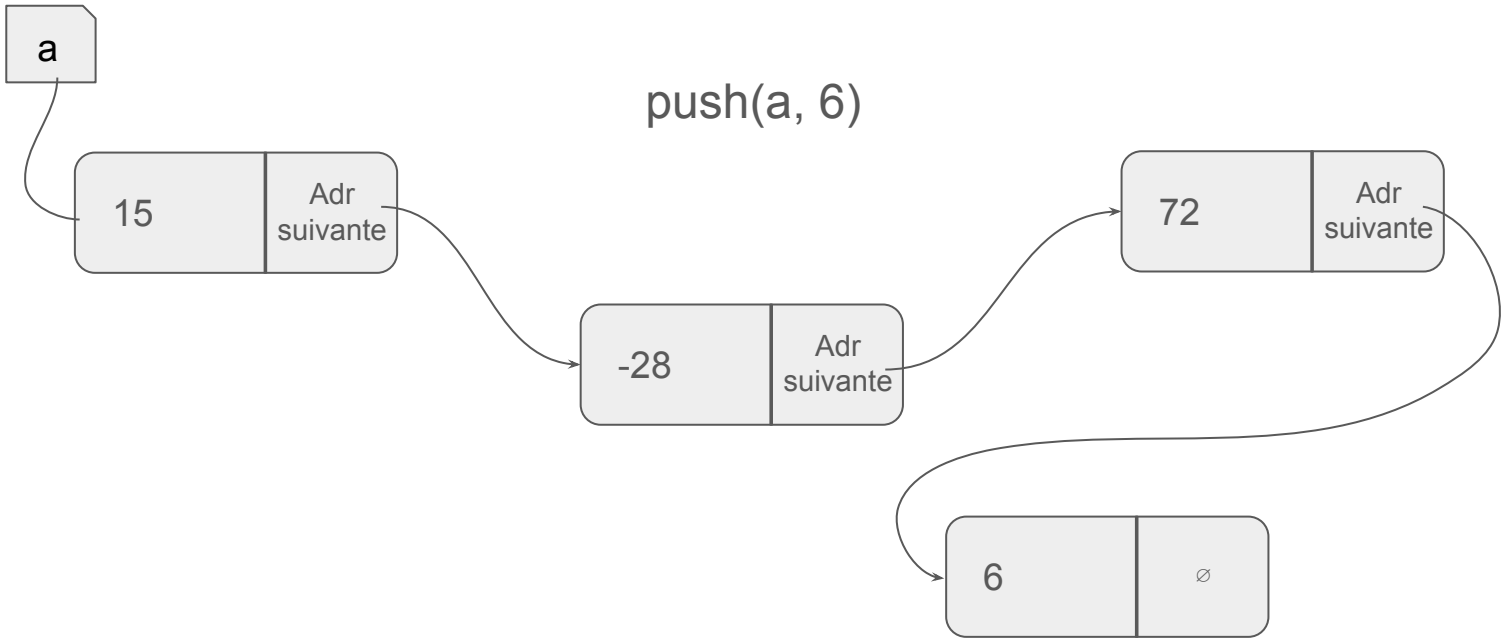


Chaque élément contient à la fois une **valeur** et l'**adresse du prochain** élément.

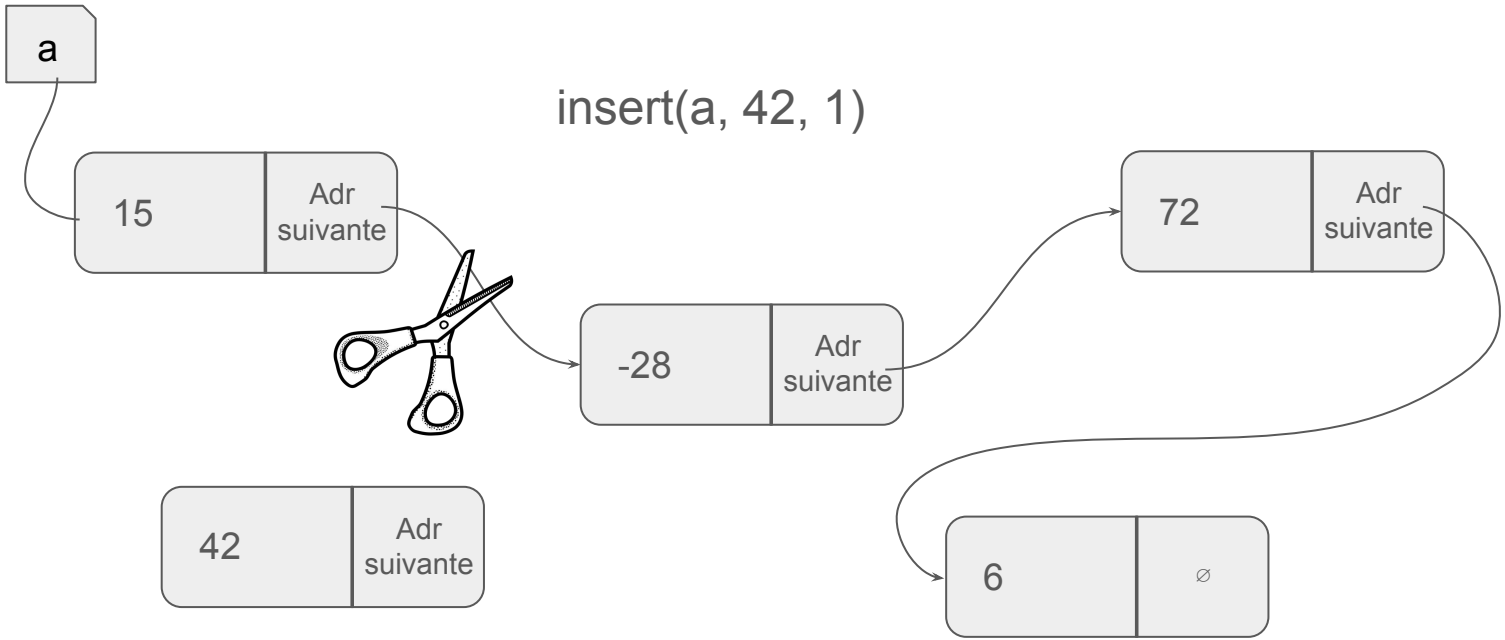
Liste chaînée | **Visualisation**



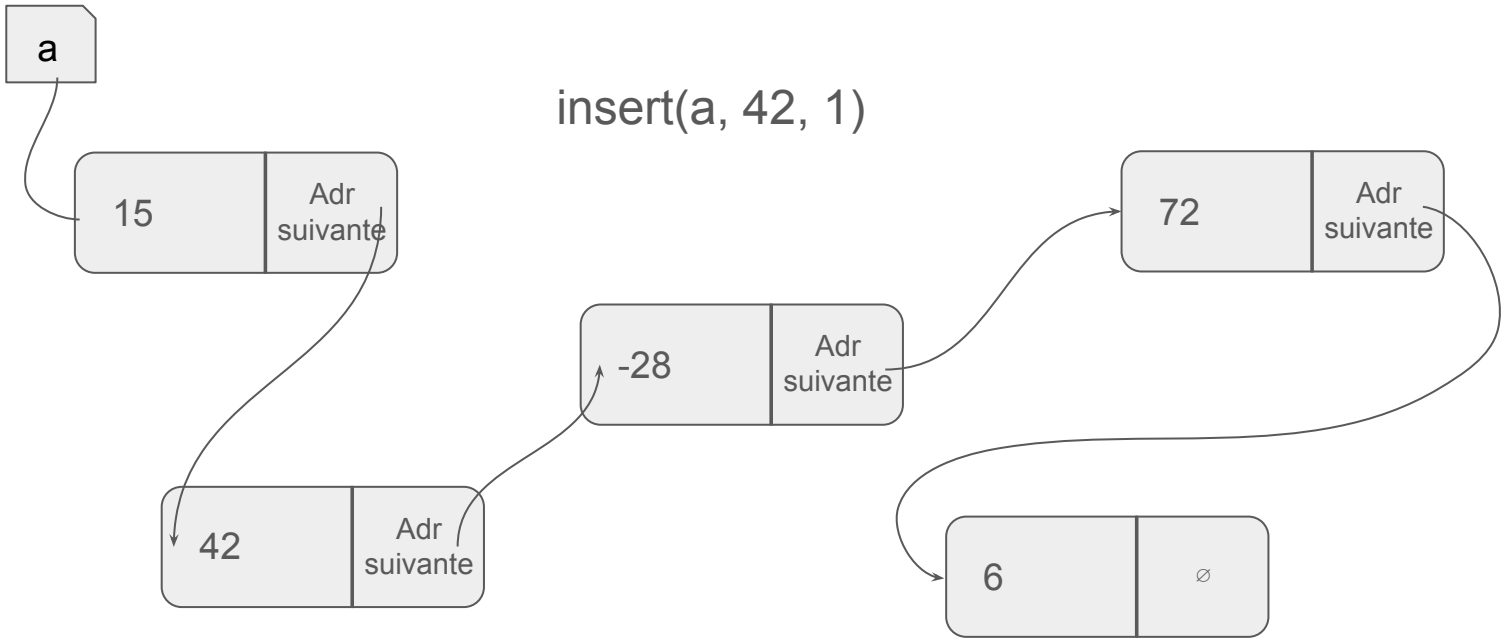
Liste chaînée | **Insertion d'un élément à la fin**



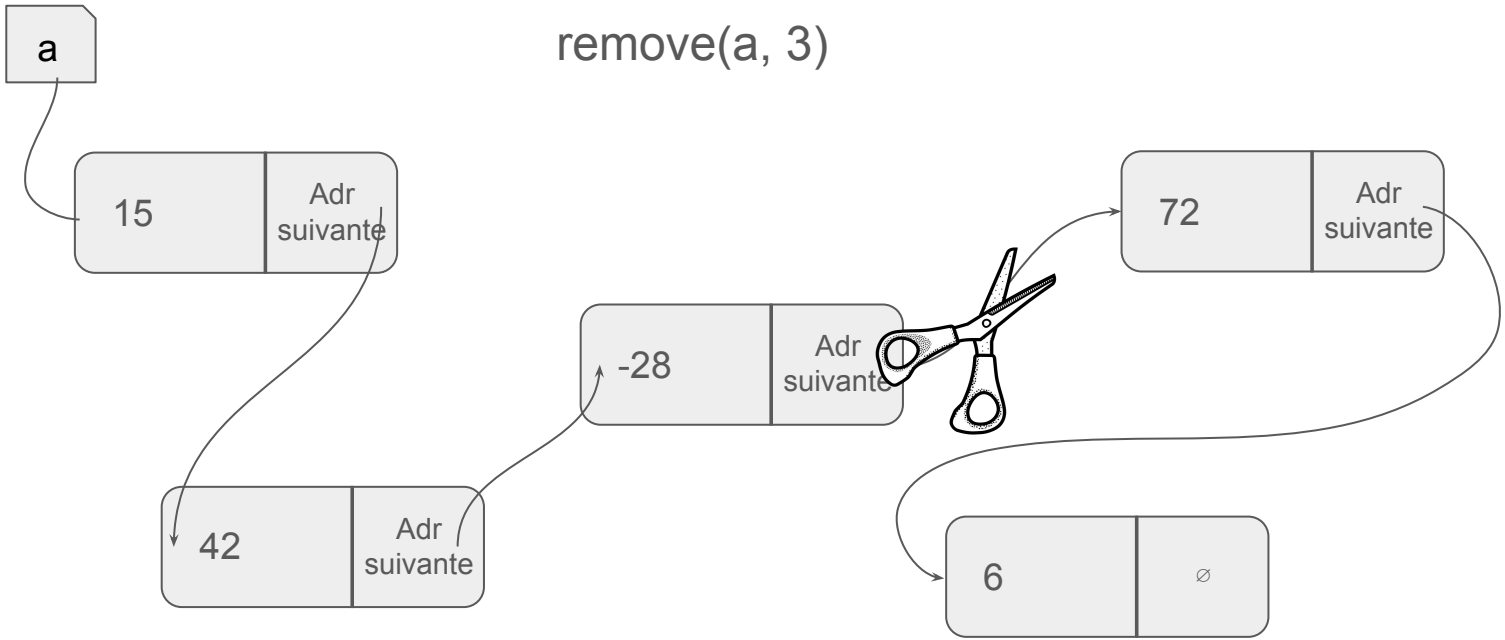
Liste chaînée | **Insertion arbitraire**



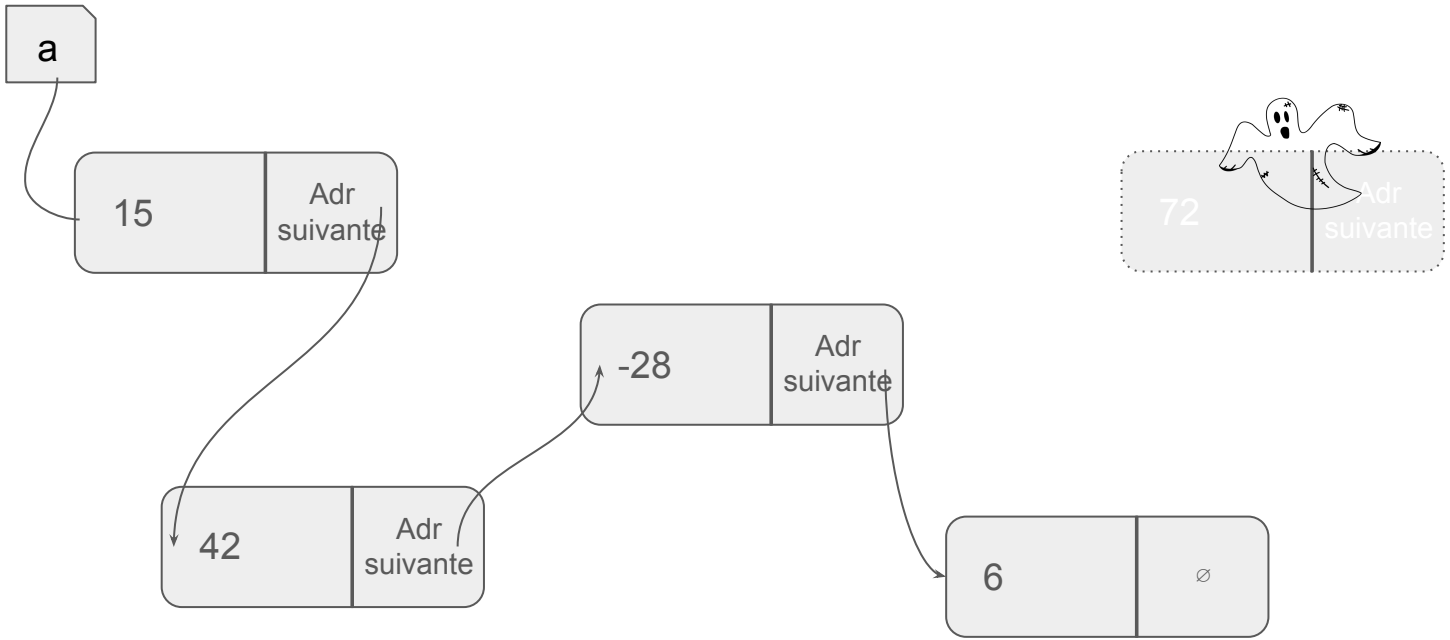
Liste chaînée | **Insertion arbitraire**



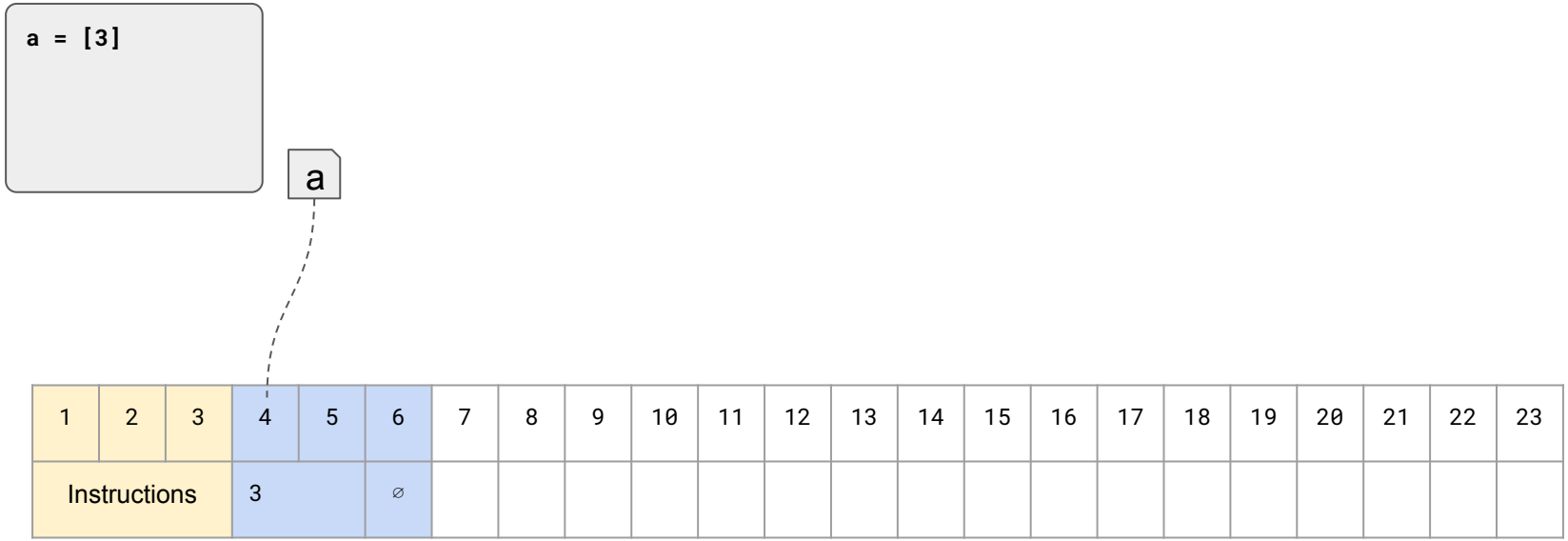
Liste chaînée | **Suppression arbitraire**



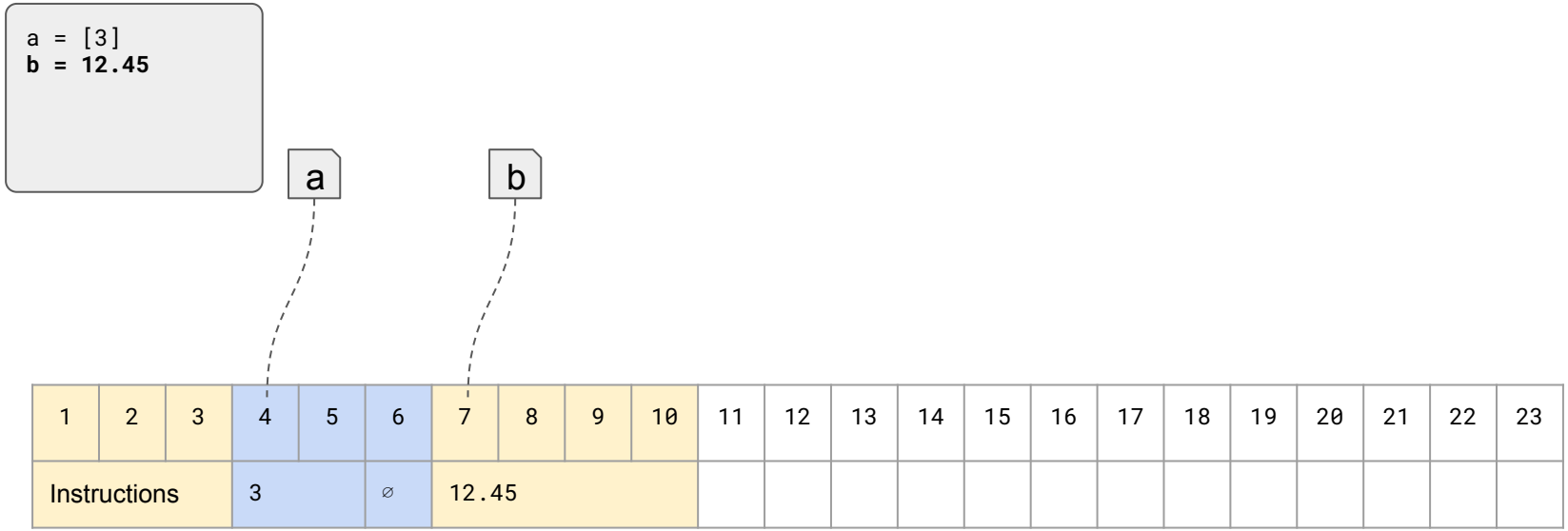
Liste chaînée | **Suppression arbitraire**



Liste chaînée | **Principe**



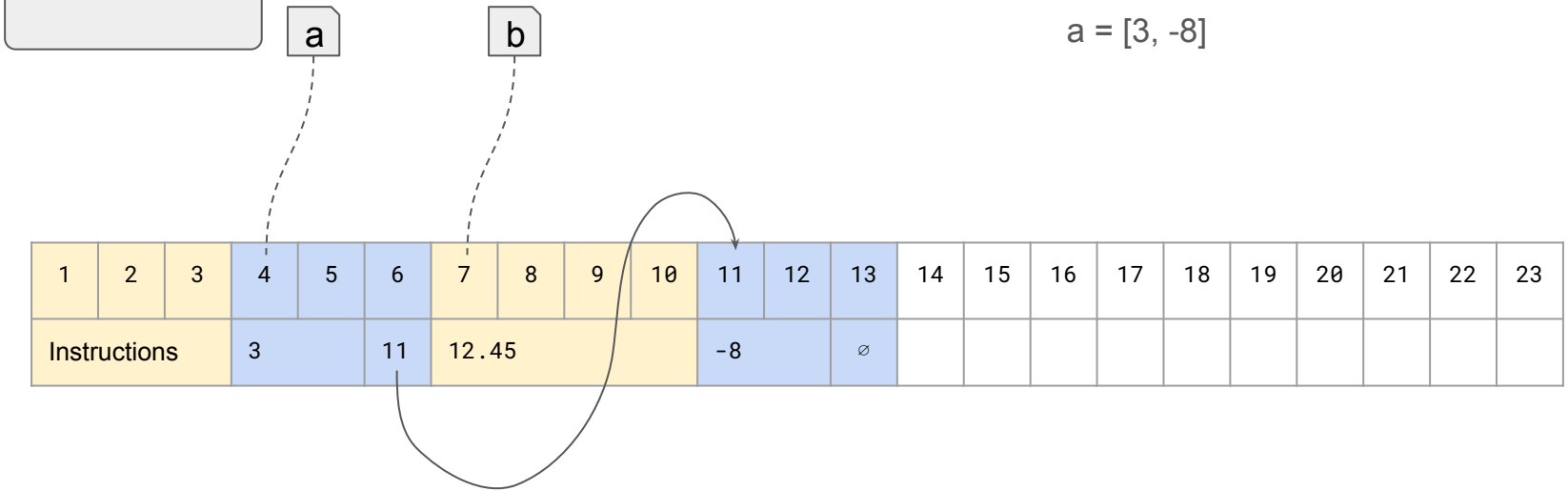
Liste chaînée | **Principe**



Liste chaînée | **Principe**

```
a = [3]
b = 12.45
push(a,-8)
```

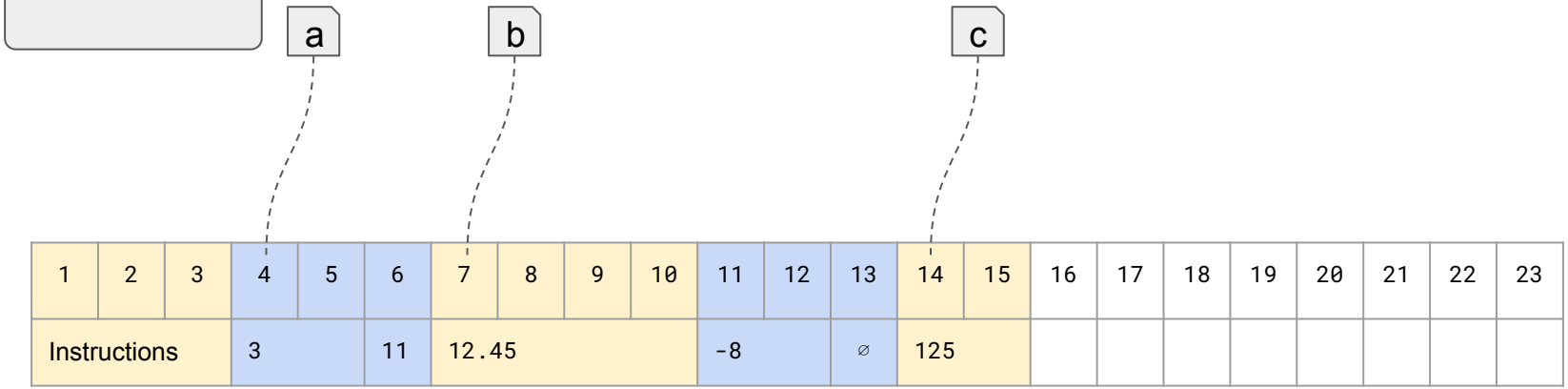
Les éléments peuvent être éparpillés en mémoire.



a = [3, -8]

Liste chaînée | **Principe**

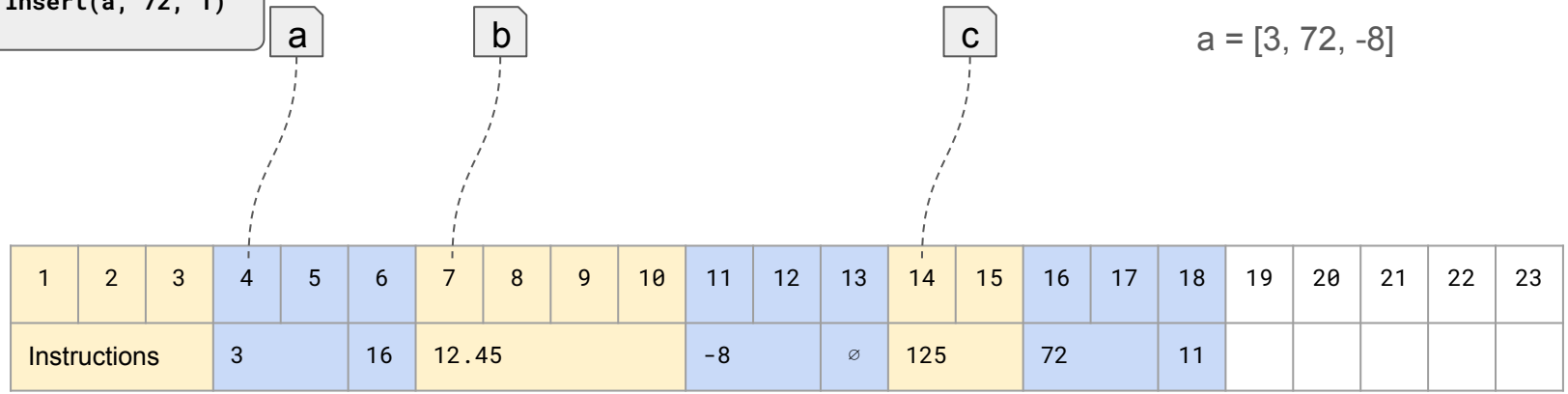
```
a = [3]
b = 12.45
push(a,-8)
c = 125
```



Liste chaînée | **Principe**

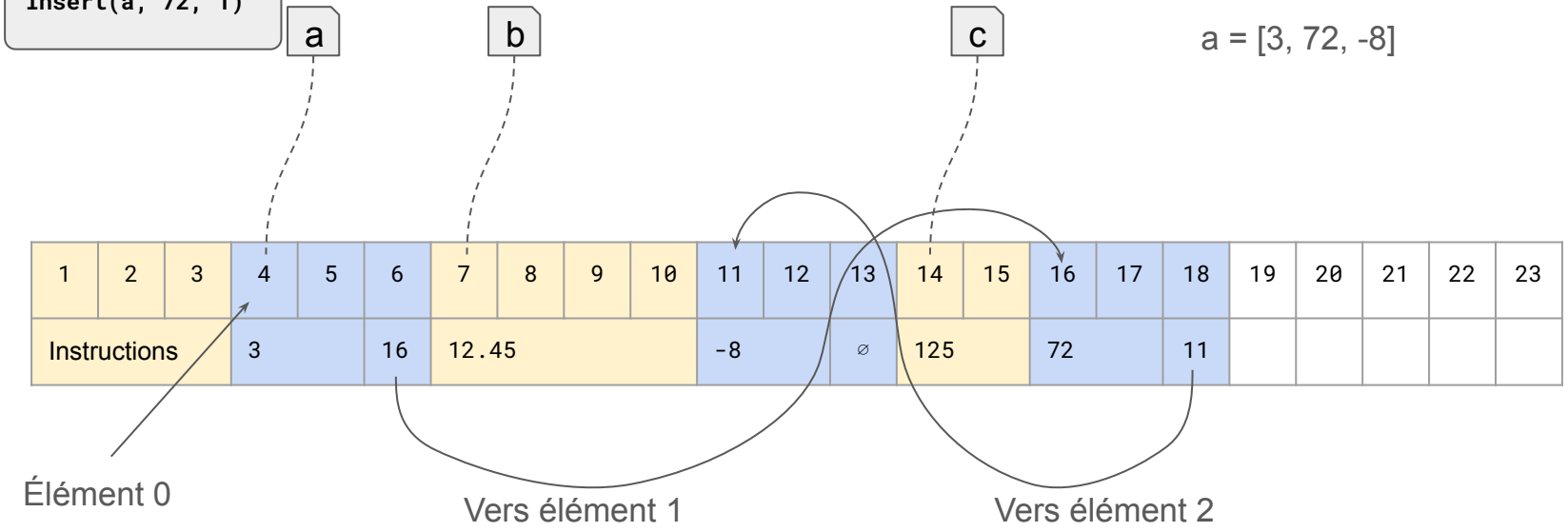
```
a = [3]
b = 12.45
push(a,-8)
c = 125
insert(a, 72, 1)
```

a = [3, 72, -8]



Liste chaînée | **Principe**

```
a = [3]
b = 12.45
push(a,-8)
c = 125
insert(a, 72, 1)
```



Liste chaînée | **Complexité d'accès à un élément**

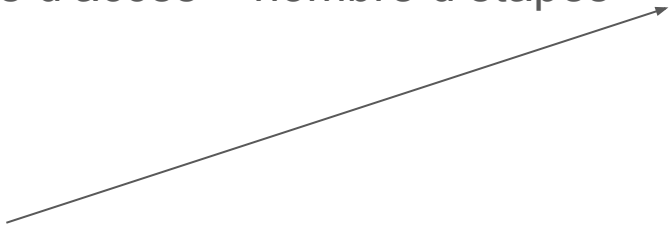
- En **combien d'étapes** peut-on trouver l'adresse de l'élément *i* de la liste ?
- Une fois cette adresse trouvée, on peut y accéder en un temps égal au temps d'accès à la mémoire centrale, qui ne dépend pas de l'adresse.
- Le **temps d'accès** est approximativement proportionnel au nombre d'étapes nécessaires pour trouver l'adresse de l'élément.
- On va s'intéresser au comportement de ce temps d'accès. Est-il une constante ? Est-il proportionnel à la taille *n* de la liste ? À n^2 ? À 2^n ? …

Liste chaînée | **Complexité d’accès à un élément**

- Pour **accéder** à l’élément numéro *i*, il faut partir de l’élément numéro 1 puis "suivre le fil" ⇒ Dans le pire des cas, le temps d’accès est proportionnel à la taille de la liste !
  On écrit : temps d’accès ~ nombre d’étapes = $O(n)$.

Liste chaînée | **Complexité d'accès et d'insertion**

- Pour accéder à l'élément numéro *i*, il faut partir de l'élément numéro 1 puis "suivre le fil" ⇒ Dans le pire des cas, le temps d'accès est proportionnel à la taille de la liste !
  On écrit : temps d'accès ~ nombre d'étapes = $O(n)$.



Notation "Grand ***O***" pour "**O**rdre de".
Nous y reviendrons dans un prochain chapitre.
Ce qu'il faut retenir : $O(n)$ signifie "est proportionnel à n".
Se lit : "complexité en O(n)".

Liste chaînée | **Complexité d'accès et d'insertion**

- Pour **accéder** à l'élément numéro *i*, il faut partir de l'élément numéro 1 puis "suivre le fil" ⇒ Dans le pire des cas, le temps d'accès est proportionnel à la taille de la liste !
  On écrit : temps d'accès ~ nombre d'étapes = $O(n)$.

- Pour **insérer** un élément à l'indice *i*, il faut se rendre à la bonne adresse (complexité $O(n)$), puis modifier correctement les pointeurs (complexité $O(1)$).

Liste chaînée | **Complexité d'accès et d'insertion**

- Pour **accéder** à l'élément numéro *i*, il faut partir de l'élément numéro 1 puis "suivre le fil" ⇒ Dans le pire des cas, le temps d'accès est proportionnel à la taille de la liste !
  On écrit : temps d'accès ~ nombre d'étapes = $O(n)$.

- Pour **insérer** un élément à l'indice *i*, il faut se rendre à la bonne adresse (complexité $O(n)$), puis modifier correctement les pointeurs (complexité $O(1)$).

Signifie "nombre d'étapes constant"

Liste chaînée | **Complexité d'accès et d'insertion**

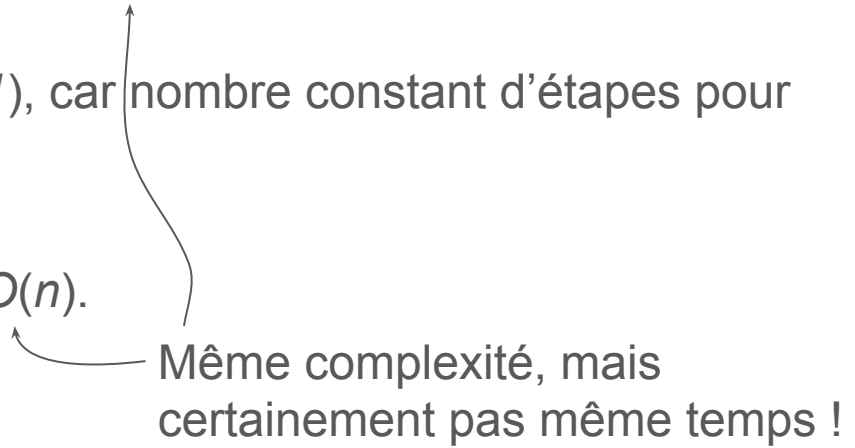
- Pour accéder à un élément : $O(n)$.
- Pour insérer un élément : $O(n)$.
- Et les tableaux ?

Liste chaînée | **Complexité d'accès et d'insertion**

- Liste chaînée | Accès à un élément : $O(n)$.
- Liste chaînée | Insertion d'un élément : $O(n)$.
- Tableau | Accès à un élément : $O(1)$, car nombre constant d'étapes pour trouver l'adresse.
- Tableau | Insertion d'un élément : $O(n)$.

Liste chaînée | **Complexité d'accès et d'insertion**

- Liste chaînée | Accès à un élément : $O(n)$.
- Liste chaînée | Insertion d'un élément : $O(n)$.
- Tableau | Accès à un élément : $O(1)$, car nombre constant d'étapes pour trouver l'adresse.
- Tableau | Insertion d'un élément : $O(n)$.



Liste chaînée | **Complexité d'insertion**

	Liste chaînée	**Tableau dynamique**
Pire des cas	Insertion à la fin	Insertion au début
Implication	Allouer de l'espace pour le prochain élément	Réallouer de l'espace et y copier toutes les valeurs
Fréquence du pire des cas	"Fréquent"	"Peu fréquent"
Gravité du pire des cas	"Légère"	"Sévère"

Liste chaînée | **Complexité d'insertion**

	Liste chaînée	**Tableau dynamique**
Pire des cas	Insertion à la fin	Insertion au début
Implication	Allouer de l'espace pour le prochain élément	Réallouer de l'espace et y copier toutes les valeurs
Fréquence du pire des cas	"Fréquent"	"Peu fréquent"
Gravité du pire des cas	"Légère"	"Sévère"
Complexité	$O(k \cdot n)$	$O(K \cdot n)$

$k < K$? ou $k > K$? Dépend du problème !

Tableaux et listes chaînées | **Avantages et inconvénients**

Tableau statique

👍	👎
Rapide d'accès	Nombre fixe d'éléments
Compact en mémoire	

Tableau dynamique

👍	👎
Rapide d'accès	Mal adapté (lent) si la taille change fréquemment
Nombre variable d'éléments	Potentiel gaspillage de mémoire

Liste chaînée

👍	👎
Nombre variable d'éléments	Lente d'accès
Adaptée si la taille change fréquemment	Potentiel gaspillage de mémoire
Adaptée pour l'insertion à des indices arbitraires	

Commentaires à propos de l'efficacité des tableaux

- Les éléments éparpillés des listes chaînées ont plus de chance de ne pas se trouver dans la mémoire cache.

- La plupart du temps, les tableaux offriront de meilleurs performances en raison du gain drastique de temps d'accès procuré par la mémoire cache (en plus des raisons plus fondamentales discutées auparavant).

- Pour une utilisation optimale des tableaux, évitez de modifier leur taille ! Exemple en MATLAB:

  `a = zeros(1, 200)`, puis remplissage des valeurs, est plus efficace que :
  `a = [ ]`, puis peuplement de 200 éléments l'un après l'autre.

Types de données abstraits

- Types concrets (int, float) : traités par le processeur en un cycle d'horloge, contrairement à des types abstraits.

- Certains types de données correspondent à des concepts plus élaborés qu'un simple nombre où suite de nombres en mémoire.

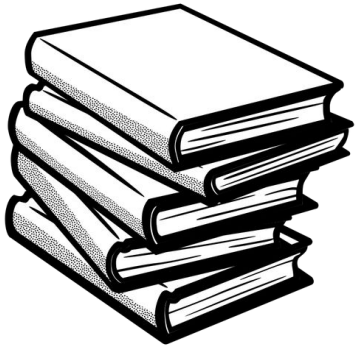
- Ces types, qui sont **définis par la façon** dont le programmeur peut **interagir** avec eux, sont nommés **types de données abstraits**.

- Au final, l'implémentation d'un type abstrait repose sur sa décomposition et son traitement via des types concrets, au sein d'une **structure de donnée**. La façon dont un type abstrait peut être implémenté *via* une structure de donnée n'est pas unique.

Types de données abstraits | **Exemple de la pile**

- Pile de nombres : *Last In, First Out* (**LIFO**).
- Définie par son **comportement** :
  - push(pile, n) :
    [a, b, c] → [a, b, c, n]

  - pop(pile) : ôte le nombre au sommet de la pile.
    [a, b, c] → [a, b]



- La façon dont `add` et `pop` sont écrites est "cachée" au programmeur ; il n'a pas besoin de savoir comment `push()` et `pop()` sont écrites pour pouvoir les utiliser.

- Exemple d'**implémentation** : cas particulier de liste chaînée.

Types de données abstraits | **Exemple de la pile**

- Exemple de type abstrait : pile.
- Implémentation possible (structure de donnée) : liste chaînée.
- Certains types abstraits sont si souvent implémentés via une structure de donnée qu'on les désigne improprement l'un par l'autre.

Exemple d’implémentation d’une pile en Python

- Dans cet exemple, on utilise une classe uniquement comme un "agrégateur" de variables.

- Afin de ne pas dévier la discussion sur l’utilisation des classes en Python, tout le reste est réalisé sans l’utilisation de fonctionnalités propres aux classes.

(Diapositive hors champ)

Exemple d’implémentation d’une pile en Python

```
class Noeud:
    def __init__(self, valeur, suivant):
        self.valeur = valeur
        self.suivant = suivant

class Pile:
    def __init__(self):
        self.sommet = None
```

(Diapositive hors champ)

Exemple d'implémentation d'une pile en Python

```
class Noeud:
    def __init__(self, valeur, suivant):
        self.valeur:int = valeur
        self.suivant:Noeud = suivant
```

Pointe sur le noeud suivant
(sauf si None)

```
class Pile:
    def __init__(self):
        self.sommet:Noeud = None
```

(Diapositive hors champ)

Exemple d'implémentation d'une pile en Python

```
def empiler(pile, valeur):
    nouveau_sommet = Noeud(valeur, pile)
    nouveau_sommet.suivant = pile.sommet
    pile.sommet = nouveau_sommet


def depiler(pile):
    noeud_a_depiler = pile.sommet
    pile.sommet = noeud_a_depiler.suivant
    return noeud_a_depiler.valeur
```

On peut imaginer plein d'autres fonctions (est_vide, calculer_taille, etc.)

(Diapositive hors champ)

Exemple d’implémentation d’une pile en Python

```
p = Pile()
empiler(p, 3)
empiler(p, -5)
empiler(p, 0)
empiler(p, 7)
a = depiler(p)
print("On vient de dépiler la valeur", a)
b = depiler(p)
print("On vient de dépiler la valeur", b)
print("La valeur du sommet en ce moment est", p.sommet.valeur)
```

(Diapositive hors champ)

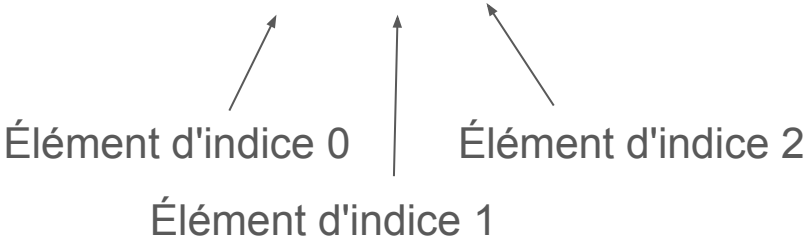
Dictionnaires (tableaux associatifs)

Clés et valeurs | **Le cas particulier des tableaux**

- Les tableaux peuvent être vus comme des couples (clé : valeur).

- Les clés sont toujours des séquences d'entiers qui se suivent, en commençant par 0 (Python) ou 1 (MATLAB).

- Exemple en Python : `a = [-7, 3, 5]`



Clés et valeurs | **Le cas particulier des tableaux**

- Exemple : `T = [-7, 3, 5]`
  La clé `0` correspond à la valeur `-7`.
  La clé 2 correspond à la valeur 5.

- Avantage : la clé est implicite, pas besoin d'écrire `T = [(0:-7), (1:3), (2:5)]`

- Désavantage : selon la nature du problème, le fait de pouvoir utiliser des clés arbitraires est désirable.

Besoin d’un dictionnaire

- Selon la nature du problème, le fait de pouvoir utiliser des clés arbitraires est désirable.

- Exemple : au sein de la population suisse, chaque citoyen possède un numéro d’identification (ID) à 8 chiffres.
  Supposons que l’on veuille établir une correspondance entre l’ID d’une personne et son nom.

  ```
  10000001 → "Dupont"
  12005082 → "Robert"
  20184663 → "Dubois"
  ```

  Comment stocker cela dans une structure de donnée ? NB : la population suisse est de quelques millions de personnes.

Besoin d’un dictionnaire | **Solution peu satisfaisante**

- Supposons que l’on veuille établir une correspondance entre l’ID d’une personne et son nom.

- Première solution possible, utiliser l'ID comme indice des éléments :

```
noms = ["", "", "", . . . ,"", "Dubois", … , ""]
```

Élément d’indice 0

Élément d’indice 20184663

Avec cette solution, l’indice des personnes coïncide avec leur ID.

- Problème : grand **gaspillage de mémoire** (tableau essentiellement vide).
  En l’occurrence environ $8 \cdot 10^6 / 10^8 = 8$ % du tableau est réellement utilisé.

Besoin d’un dictionnaire | **Solution peu satisfaisante**

Première solution possible, utiliser l'ID comme indice des éléments :

```
noms = ["", "", "", . . . ,"", "Dubois", … , ""]
```

Analogie : on veut ranger dans des tiroirs les photos des personnes. Ici, le meuble est gigantesque, mais il est facile de trouver le bon tiroir, car il y a une correspondance directe entre l'emplacement du tiroir et son numéro.

Temps d'accès à un élément : O(1)
L'emplacement du tiroir est trouvé
en un **nombre d'étapes constant**.

Espace mémoire : dépend de l'ID maximal.
(Mauvais !)

Image générée avec un outil d'openAI

Besoin d'un dictionnaire | **Solution peu satisfaisante (2)**

- Supposons toujours que l'on veuille établir une correspondance entre l'ID d'une personne et son nom.

- Seconde solution possible :

```
IDS  = [10000001, 12005082, 20184663, ...]
noms = ["Dupont", "Robert", "Dubois", ...]
```

  Quand on cherche le nom associé à une ID, on fait une boucle sur jusqu'à trouver l'indice `i` de l'ID que l'on cherche. Le nom correspondant est alors `noms[i]`.

- Problème : **lent car il faut itérer** sur les IDs pour trouver le nom correspondant. En l'occurrence, la complexité d'accès est $O(n)$. Il faut effectuer de l'ordre de 10^8 comparaisons pour accéder au dernier élément.

Besoin d'un dictionnaire | **Solution peu satisfaisante (2)**

Seconde solution possible :

```
IDS  = [10000001, 12005082, 20184663, ...]
noms = ["Dupont", "Robert", "Dubois", ...]
```

Analogie du meuble à tiroirs : Cette fois, le meuble est plus petit, mais **il faut lire chaque étiquette pour savoir** si le tiroir est celui qui contient la bonne photo.

Temps d'accès : $O(n)$ car il faut potentiellement lire chaque étiquette pour trouver le bon tiroir.

Espace mémoire : $O(n)$ car on utilise autant de tiroirs que de données.

Image générée avec un outil d'openAI

Dictionnaires

- Supposons toujours que l'on veuille établir une correspondance entre l'ID d'une personne et son nom.

- Solution idéale :
  Implémenter un type abstrait qui permette d'écrire des choses telles que :
  `{10000001:"Dupont",12005082:"Robert",20184663:"Dubois",...}`

  ⇒ Comment **implémenter** cela sans utiliser l'une des méthodes précédentes ?

- Ce type de donnée abstrait est nommé **dictionnaire** ou encore **tableau associatif**.

Dictionnaires

- On veut implémenter un type abstrait tel que
  `{10000001:"Dupont",12005082:"Robert",20184663:"Dubois",...}`

- Plus généralement, on aimerait pouvoir utiliser une séquence arbitraire comme clé !
  (On utilisera des entiers pour coder les caractères si besoin)

Comment implémenter un dictionnaire

- Le dictionnaire tel que décrit précédemment est un type abstrait.

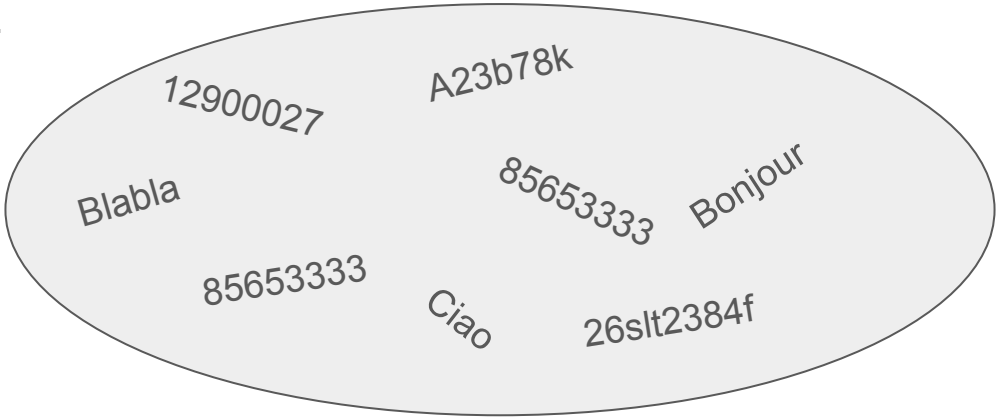
- Comment l'implémenter en étant à la fois efficace en temps et en mémoire ? Spoiler : il existe un moyen d'avoir un accès moyen en $O(1)$ comme pour la solution 1, tout en occupant un espace mémoire en $O(n)$ comme pour la solution 2.

- Deux approches populaires pour **implémenter** un dictionnaire : l'une utilise des arbres, l'autre des **tables de hachage**. Nous examinons ici la seconde.

Tables de hachage | **Principe de base**

- Reformulation du problème : l'ensemble des **clés possibles** est beaucoup plus grand que le nombre de **valeurs** réellement existantes.

- Cela nous empêche d'établir de façon raisonnable une correspondance unique entre clés et valeurs.

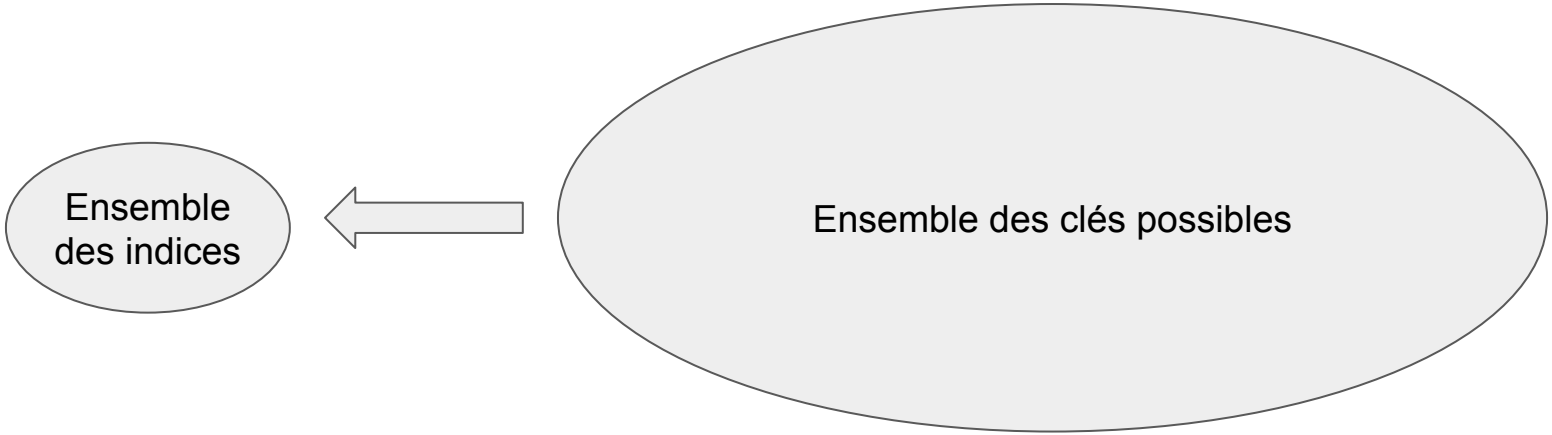


Ensemble des clés possibles
(très vaste)

Tables de hachage | **Principe de base**

Idée de base :

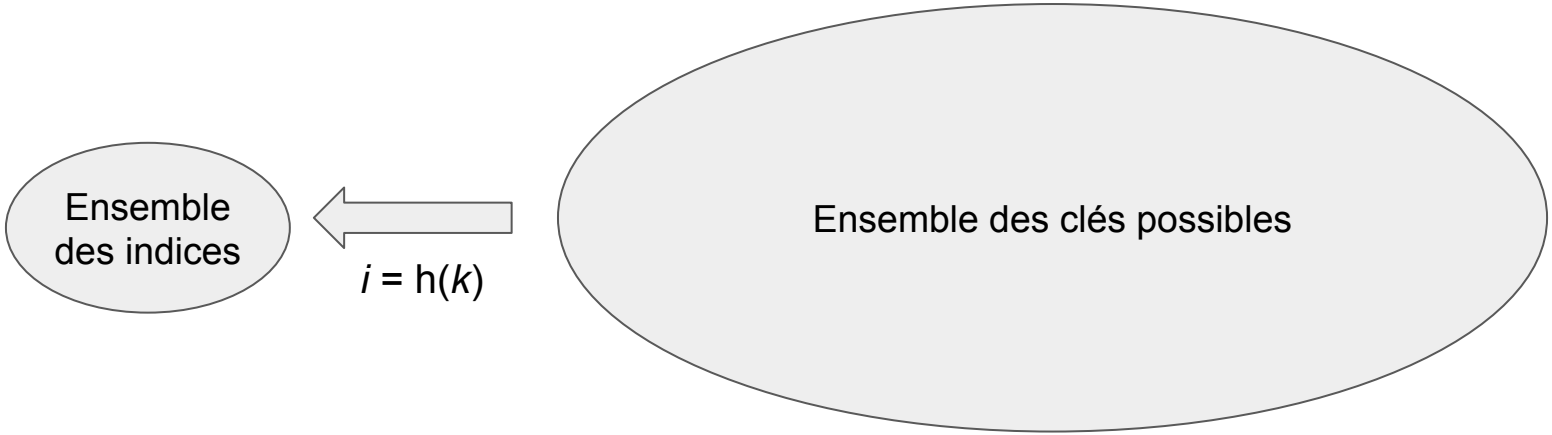
1) Les **valeurs** du dictionnaire sont rangées dans un **tableau**.
2) L'**indice** des éléments de ce tableau est **calculé à partir de la clé**.
3) L'ensemble des indices possibles peut être restreint comparé à celui des clés.



Tables de hachage | **Fonction de hachage**

- Il nous faut donc appliquer une transformation à toute clé *k*, de sorte qu'on obtienne une valeur *i* comprise entre 0 et une certaine taille *C*.

- Cette transformation est réalisée par une **fonction de hachage** h(k).



Tables de hachage | **Fonction de hachage**

Exemple de fonction remplissant partiellement ce rôle : h(k) = mod(k,C) = k % C.

L'opération **modulo** n désigne le reste de la division entière par n. On a donc la garantie que le résultat est dans l'intervalle [0, C].

Quelques exemples avec C = 5 :

22 % 5 = 2, car 22 = 4·5 + **2**

15 % 5 = 0, car 15 = 3·5 + **0**

1 % 5 = 1, car 1 = 0·5 + **1**

5678954 % 5 = 4, car 5678954 = 1135790·5 + **4**

Tables de hachage | **Fonction de hachage**

- On peut maintenant ranger les valeurs dans un tableau "normal".
- L'indice des éléments est déterminé par la valeur de hachage de leur clé.
- On peut lire et écrire les valeurs en calculant cet indice.
  ⇒ La complexité d'accès est celle de h(k), donc *O*(1) en général !

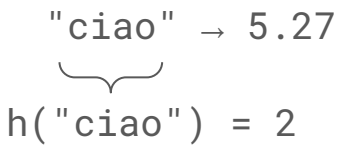


Tableau de valeurs T

indice	*valeur*
0	∅
1	∅
2	**5.27**
3	∅

Tables de hachage | **Le problème des collisions**

- Si l'ensemble des indices est plus petit que l'ensemble des clés possibles, il est **inévitable** que deux clés potentielles soient associées au même indice.

- On dit que deux clés menant à la même entrée du tableau de valeurs produisent une **collision**.

- Une bonne fonction de hachage **répartit** au mieux les valeurs, de sorte à éviter au maximum les collisions. Peut être optimisé en fonction de la nature des clés.

- Dans le cas général, il nous faut un mécanisme de **gestion des collisions**.

Tables de hachage | **Gestion des collisions**

- Prenons la fonction de hachage suivante sur les textes k :
  $h(k) = (k_0 + k_1 + \ldots) \% 5$.

- Exemple : h("ciao") = (99 + 105 + 97 + 111) % 5 = 412 % 5 = 2.

  "c" "i" "a" "o"

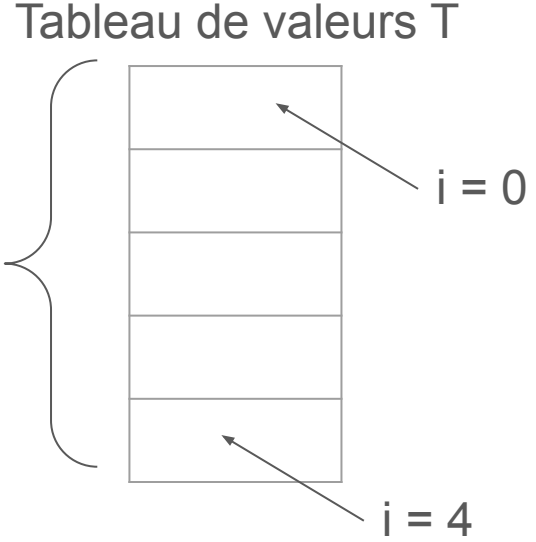
- Nous allons maintenant associer des textes à des valeurs et voir comment ces valeurs se rangent dans la table de hachage.

Tables de hachage | **Gestion des collisions**

Associons un âge à des prénoms.

Par exemple, on aimerait associer "sara" à 25 ans.

5 entrées dans le tableau T en mémoire centrale

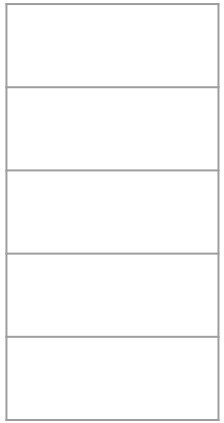


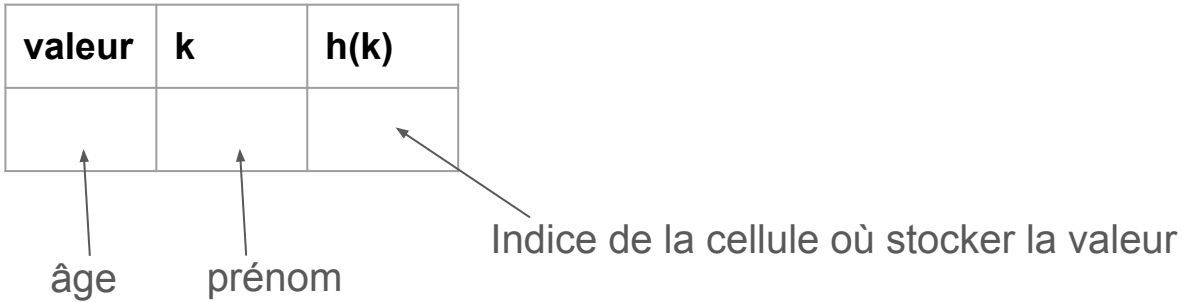
Tables de hachage | **Gestion des collisions**

Exemple : associons un âge à des prénoms.

Chaque **prénom** sera une **clé**.
Chaque **âge** sera la **valeur** associée à cette clé.
Pour chaque clé k, il faut calculer son hash h(k).
Le hash sera utilisé comme indice du tableau.

Tableau de valeurs T





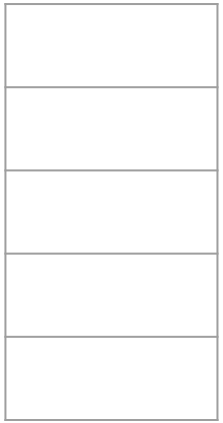
Tables de hachage | **Gestion des collisions**

```
T["sara"] = 25
```

valeur	**k**	**h(k)**
25	"sara"	

âge prénom

T



Tables de hachage | **Gestion des collisions**

```
T["sara"] = 25
```

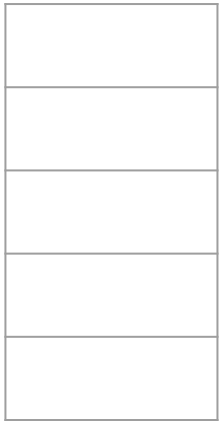
valeur	**k**	**h(k)**
25	"sara"	3

h("sara") = (115+97+114+97)%5

= 423%5

= **3**

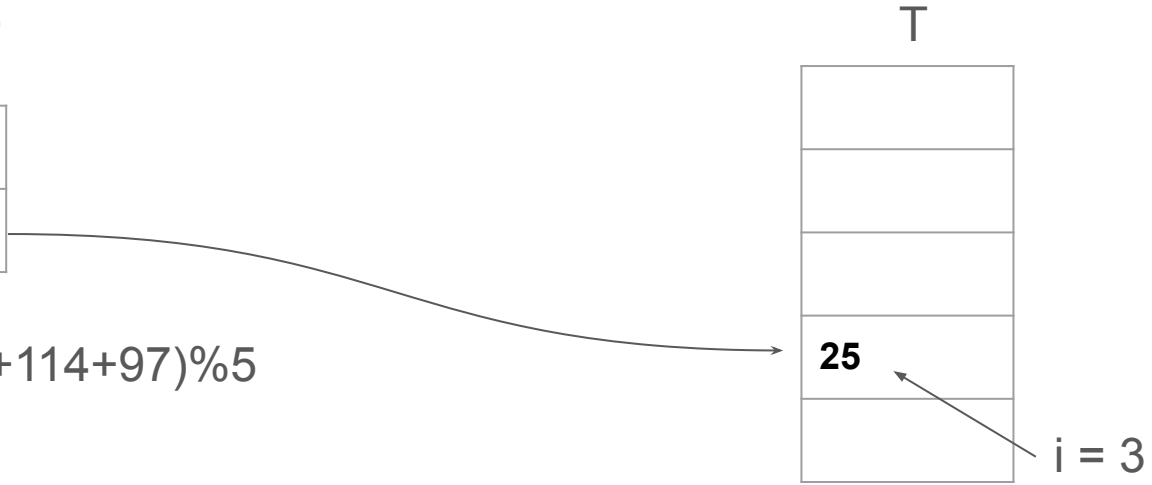
T



Tables de hachage | **Gestion des collisions**

```
T["sara"] = 25
```

valeur	**k**	**h(k)**
25	"sara"	3



h("sara") = (115+97+114+97)%5

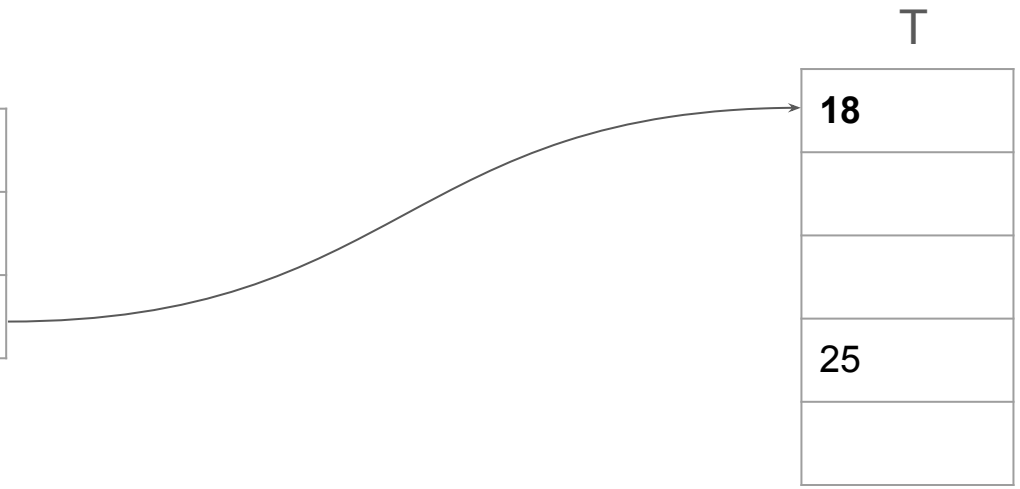
= 423%5

= **3**

Tables de hachage | **Gestion des collisions**

```
T["leo"] = 18
```

valeur	**k**	**h(k)**
25	"sara"	3
18	"leo"	0



Tables de hachage | **Gestion des collisions**

```
T["eva"] = 83
```

valeur	**k**	**h(k)**
25	"sara"	3
18	"leo"	0
83	"eva"	1

Tables de hachage | **Gestion des collisions**

```
T["zoe"] = 25
```

valeur	**k**	**h(k)**
25	"sara"	3
18	"leo"	0
83	"eva"	1
25	"zoe"	4

T

18
83
25
25

Tables de hachage | **Gestion des collisions**

```
T["sam"] = 33
```

valeur	k	h(k)
25	"sara"	3
18	"leo"	0
83	"eva"	**1**
25	"zoe"	4
33	"sam"	**1**

Collision:
`h("eva") = h("sam")`

!

T

18
83
25
25

Tables de hachage | **Gestion des collisions**

```
T["sam"] = 33
```

valeur	k	h(k)
25	"sara"	3
18	"leo"	0
83	"eva"	1
25	"zoe"	4
33	"sam"	1

Plusieurs possibilités :

- Chercher le prochain emplacement libre.
- Rehacher avec h’(k).
- …

Dans tous les cas, il faut également stocker la clé si l’on veut pouvoir identifier les éléments issus de collisions.

T

18
83
25
25

Tables de hachage | **Gestion des collisions**

```
T["sam"] = 33
```

valeur	k	h(k)
25	"sara"	3
18	"leo"	0
83	"eva"	1
25	"zoe"	4
33	"sam"	1

Plusieurs possibilités :

- Chercher le prochain emplacement libre.
- Rehacher avec h’(k).
- …

Dans tous les cas, il faut également stocker la clé si l’on veut pouvoir identifier les éléments issus de collisions.

T

18
83
33
25
25

Tables de hachage | **Adressage ouvert**

valeur	**k**	**h(k)**
25	"sara"	3
18	"leo"	0
83	"eva"	1
25	"zoe"	4
33	"sam"	1

Dans tous les cas, il faut également stocker la clé si l'on veut pouvoir identifier les éléments issus de collisions.

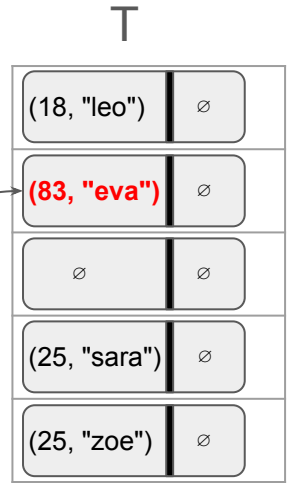
T

(18, "leo")
(83, "eva")
(**33**, "sam")
(25, "sara")
(25, "zoe")

Tables de hachage | **Adressage fermé**

valeur	**k**	**h(k)**
25	"sara"	3
18	"leo"	0
83	"eva"	1
25	"zoe"	4
33	"sam"	1

Les éléments de T peuvent aussi être des entrées de listes chaînées.

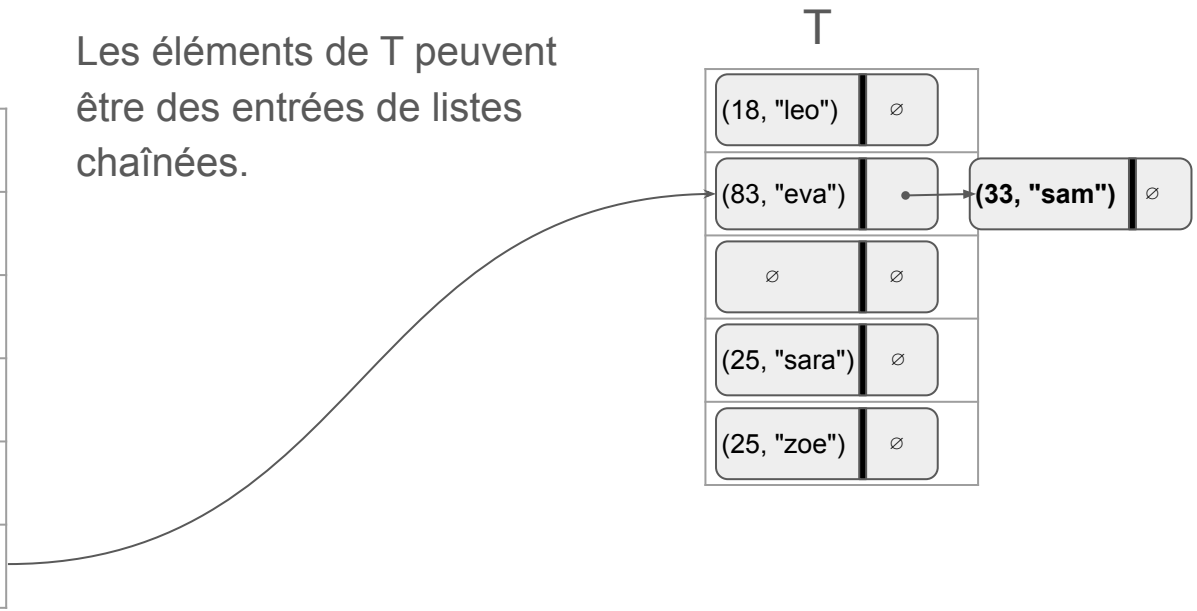


(ou n'importe quelle autre structure qui peut contenir plusieurs éléments)

Tables de hachage | **Adressage fermé**

valeur	**k**	**h(k)**
25	"sara"	3
18	"leo"	0
83	"eva"	1
25	"zoe"	4
33	"sam"	1

Les éléments de T peuvent être des entrées de listes chaînées.



Tables de hachage | **Gestion des collisions**

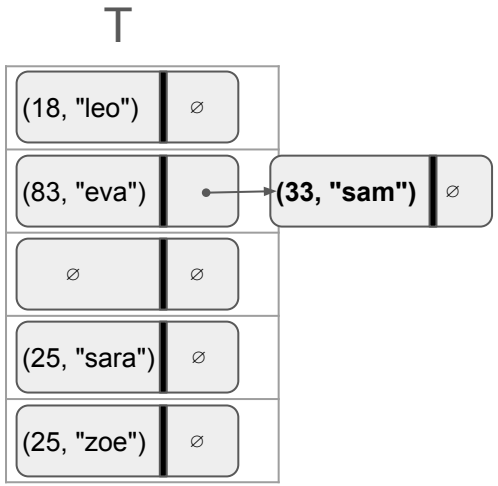
Temps d'accès avec adressage fermé comme ouvert :

- Cas de collision est *O*(n).
- Cas le plus fréquent est *O*(1).

Cas d'utilisation :

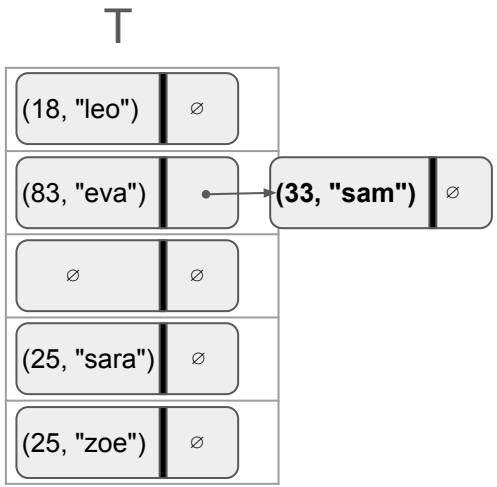
- Adressage ouvert idéal lorsque peu de collisions sont à prévoir, mais devient handicapant si trop de collisions surviennent dans une zone de T.

- Adressage fermé à privilégier si les collisions sont nombreuses.



Tables de hachage | **Exemple d'accès (adressage fermé)**

L'utilisateur veut obtenir la valeur associée à la clé `"x"`.
Code de l'utilisateur : `age_de_x = T["x"]`



Dans ce cas, la fonction qui implémente l'accès aux éléments de la table doit :

1. calculer `i = h("x")`.
2. accéder à la liste chaînée `L = T[i]`.
3. si L est vide, alors la clé n'est associée à rien.
4. sinon, parcourir L et retourner l'élément associé à `"x"`.

Tables de hachage | **Résumé**

- Constitue une façon d'**implémenter un dictionnaire**.
- Permet d'associer des **clés** hachables à des **valeurs**.
- En moyenne, temps d'accès aux éléments en $O(1)$ tout en nécessitant un espace mémoire en $O(n)$.
- Plus lent qu'un tableau, mais plus général.

Tables de hachage | **Facteur de charge**

- Il est à noter qu'en pratique, on peut **redimensionner** la table (comme un tableau dynamique) de sorte à générer moins de collisions et à avoir un peu de **marge** en cas de collision.

- Exemple d'heuristique : si T est rempli à plus de 3/4, on génère une nouvelle version agrandie d'un facteur 2.

- Le taux de remplissage de T est nommé le **facteur de charge** de la table de hachage.

- En fait, la table de hachage peut être vue comme un compromis entre les deux approches naïves considérées plus tôt : tableau surdimensionné et liste de clés-valeurs.

Tables de hachage | **Fonction de hachage - commentaires**

- Le modulo seul ne constitue pas nécessairement une bonne fonction de hachage.
- En général, une fonction de hachage ne **préserve pas l'ordre** des indices par rapport à celui des clés.
- Une bonne fonction de hachage permet de calculer le hash **rapidement** à partir de la clé.
- Une bonne fonction de hachage permet d'éviter au maximum des **collisions**.

Tables de hachage | **Fonction de hachage - commentaires**

- Dans ce cours, l'indice du tableau des valeurs est directement issu de la fonction de hachage, mais c'est une simplification.

- Pour simplifier, on a pris h(k) = mod(k,C). En réalité les fonctions de hachage sont plus complexes afin de mieux répartir les valeurs (*pseudo-randomness*) : deux clés très légèrement différentes peuvent donner lieu à des hash complètement différents.

- Dans la littérature, on distingue en général le hash de la clé de l'indice auquel elle correspond : la dernière étape, qui fait passer de l'un à l'autre, est justement l'application du modulo.

Quelques structures de données

👍 Tableau statique 👎

Accès en O(1)	Nombre fixe d'éléments
Compact en mémoire	

👍 Tableau dynamique 👎

Accès en O(1)	Mal adapté (lent) si la taille change fréquemment
Nombre variable d'éléments	Potentiel gaspillage de mémoire

👍 Liste chaînée 👎

Nombre variable d'éléments	Accès en O(n)
Adaptée si la taille change fréquemment	Potentiel gaspillage de mémoire
Adaptée pour l'insertion à des indices arbitraires	

👍 Table de hachage 👎

Accès moyen en O(1)	Potentielles collisions faisant chuter l'efficacité
Nombre variable d'éléments	Potentiel gaspillage de mémoire
Permet des associations clés-valeur	

Tables de hachage | **Lien avec le domaine de la sécurité**

- Certaines fonctions de hachage ont la propriété qu'il est extrêmement difficile, connaissant le hash, de retrouver la clé d'origine.

- Si par ailleurs de telles fonctions impliquent très peu de collisions et qu'elles ont une bonne pseudo-randomness, alors elles sont utiles en cryptologie, par exemple pour l'**authentification** des utilisateurs d'un site.

- En effet, le site peut vérifier que l'utilisateur possède le bon mot de passe sans jamais devoir stocker ce dernier dans une base de donnée ! C'est le hash du mot de passe qui est stocké. Il suffit de comparer le hash du mot de passe reçu avec le hash du mot de passe stocké.

Tables de hachage | **Exemple en Python**

Cf. démonstration en cours.

```
ages = {"sara":25, "leo":18, "eva":83}
ages["léa"] = 19 #ajout d'un élément après-coup
print("L'âge d'Eva vaut", ages["eva"])
```

Tables de hachage | **Exemple en Python**

Cf. démonstration en cours.

```
echiquier = {"e1":"Roi", "h2":"Pion", "g1":"Cavalier"}
cle = input("Quelle case voulez-vous examiner?")
. . .  # (ne reste plus qu'à traiter la valeur associée)
```

D'autres structures de données

- On peut concevoir des structures de données autant que nécessaire afin de résoudre un problème.

- Par exemple : structures de données adaptées pour le traitement informatique des graphes.

- Avant cela, nous allons nous intéresser aux algorithmes de tri.