Introduction à l'informatique

pour les mathématiques, la physique et les sciences computationnelles

Yann Thorimbert

Partie 2 | Chapitre 4
Algorithmes de recherche au sein d'une séquence

Yann Thorimbert

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
CENTRE UNIVERSITAIRE D'INFORMATIQUE

Chapitres du cours (seconde partie du cours)

0. Introduction à la complexité algorithmique

1. Algorithmes de tri naïfs

2. Structures de données : tableaux, listes et dictionnaires

3. Tri fusion et récursivité

4. Algorithmes de recherche au sein d'une séquence ←

5. Algorithmes sur graphes

Algorithmes de recherche au sein d'une séquence

Algorithmes de recherche | **Séquences quelconques**

- But : La séquence S contient la valeur *v*. Il faut trouver l'indice auquel ce nombre se trouve.
- Dans le cas général où les éléments sont dans un ordre quelconque, il faut parcourir la séquence jusqu'à trouver celui qui nous intéresse :

```
1. Pour chaque entier i de 0 à n-1:
    a. Si S[i] = q, retourner i
```

- La complexité dans le pire des cas est alors $O(n)$.
- Implémentation Python : ?

Algorithmes de recherche | **Séquences ordonnées**

- Si la séquence est ordonnée, on peut exploiter l'ordonnancement pour améliorer la performance de la recherche.
- La recherche dichotomique est un exemple intuitif d'un algorithme exploitant une telle propriété.
- Spontanément, bon nombre d'humains mettent en oeuvre une sorte de recherche dichotomique lorsqu'on leur demande de deviner un nombre au sein d'un espace restreint de possibilités ordonnées.

Jeu de la devinette

- Jeu : le joueur doit deviner un entier entre 1 et 100. Quand il se trompe, on lui indique si le nombre à trouver est plus petit ou plus grand que ce qu'il a tenté.

- Exemple d'historique de partie :

```
-Le nombre vaut-il 50 ?
-Plus petit.
-Vaut-il 25 ?
-Plus grand ?
-Vaut-il 38 ?
(etc.)
```

À chaque fois, le joueur tente la valeur au milieu de l'intervalle des entiers non-éliminés.

Recherche dichotomique | **Idée générale**

1. On compare le nombre cherché avec le nombre au milieu de la séquence.

2. Si le nombre cherché est plus petit que le nombre au milieu de la séquence, on revient au point 1 après avoir décidé que la nouvelle séquence à considérer est la première moitié de la séquence initiale.

3. Sinon, si le nombre cherché est plus grand que le nombre au milieu de la séquence, on revient au point 1 après avoir décidé que la nouvelle liste à considérer est la deuxième moitié de la séquence initiale.

4. Sinon, on a trouvé l'emplacement du nombre cherché.

Recherche dichotomique | **Commentaires sur x ∉ S**

- D'après la façon dont notre algorithme est formulé, l'indice de début ne peut qu'augmenter et l'indice de fin ne peut que diminuer.
- La taille de la sous-séquence à considérer vaut `fin - debut`.
- Cela n'a pas de sens si la taille est négative, c'est à dire si `fin < debut`. C'est là une condition pour déterminer que l'élément ne figure pas dans la séquence.

Recherche dichotomique | **Commentaires sur la division**

- Que faire du reste de la division dans `i = (fin + deb) / 2` ?
- i représente l'indice du milieu du tableau, c'est donc un entier.
- Exemple 1: si `fin = 4` et `deb = 2`, alors `i = (4+2)/2 = 3` (ok).
- Exemple 2 : si `fin = 5` et `deb = 2`, alors `i = (5+2)/2 = 3.5` (pas ok).
- Solution : **arrondir** soit vers le bas, soit vers le haut. Une façon commune de procéder est d'utiliser une division entière (arrondi vers le bas).
  - Exemple en Python : `i = (fin + deb) // 2`
  - `Exemple en MATLAB : i = floor((fin + deb)/2);`

Recherche dichotomique | **Exemple pas à pas**

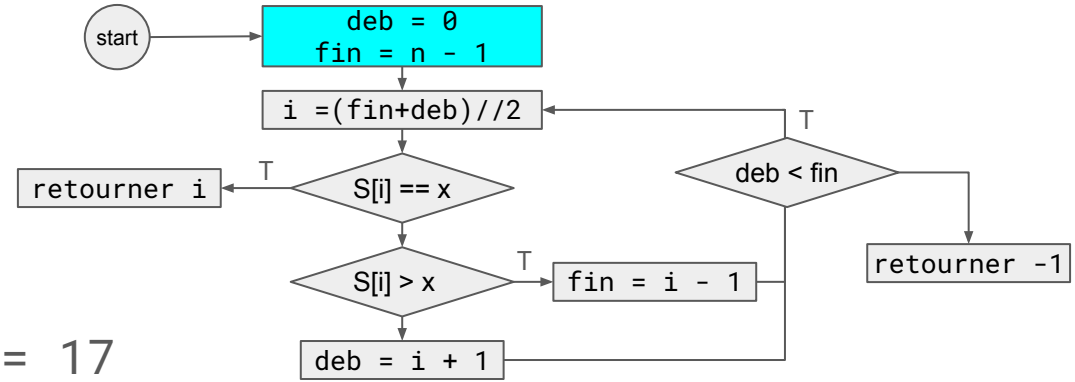
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	3	4	6	7	8	8	11	13	17	18	20	22	24	25	26

On cherche x = 17

Recherche dichotomique | **Exemple pas à pas**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	3	4	6	7	8	8	11	13	17	18	20	22	24	25	26

deb **fin**

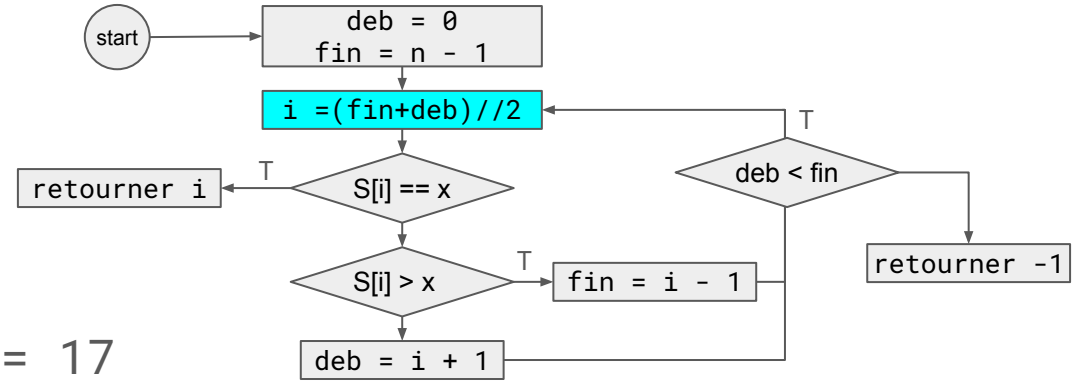


On cherche x = 17

Recherche dichotomique | **Exemple pas à pas**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	3	4	6	7	8	8	11	13	17	18	20	22	24	25	26

deb i fin

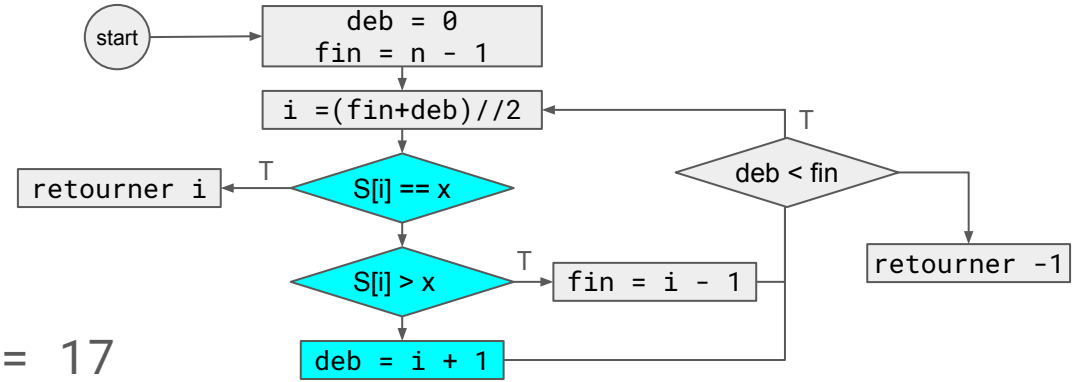


On cherche x = 17

Recherche dichotomique | **Exemple pas à pas**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	3	4	6	7	8	8	11	13	17	18	20	22	24	25	26

i **deb** fin

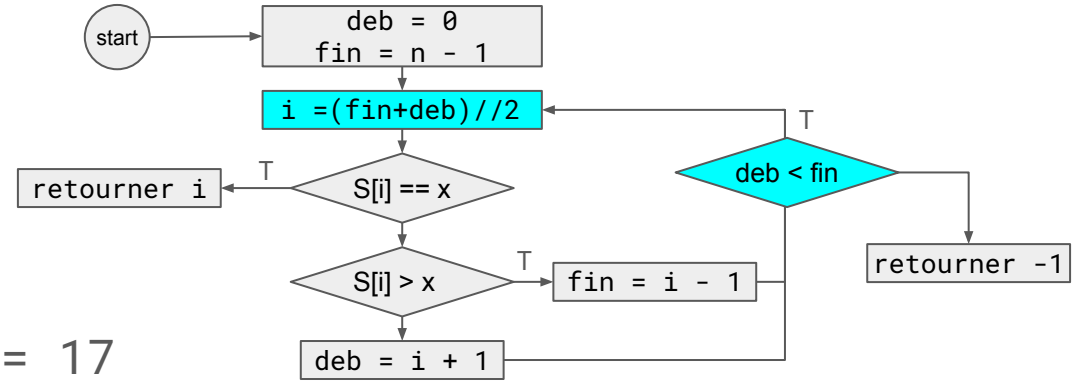


On cherche x = 17

Recherche dichotomique | **Exemple pas à pas**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	3	4	6	7	8	8	11	13	17	18	20	22	24	25	26

deb i fin

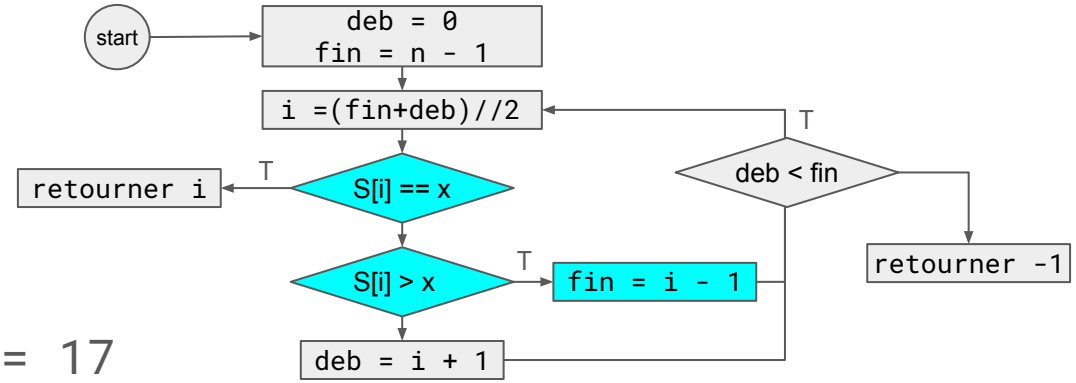


On cherche x = 17

Recherche dichotomique | **Exemple pas à pas**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	3	4	6	7	8	8	11	13	17	18	20	22	24	25	26

deb fin i

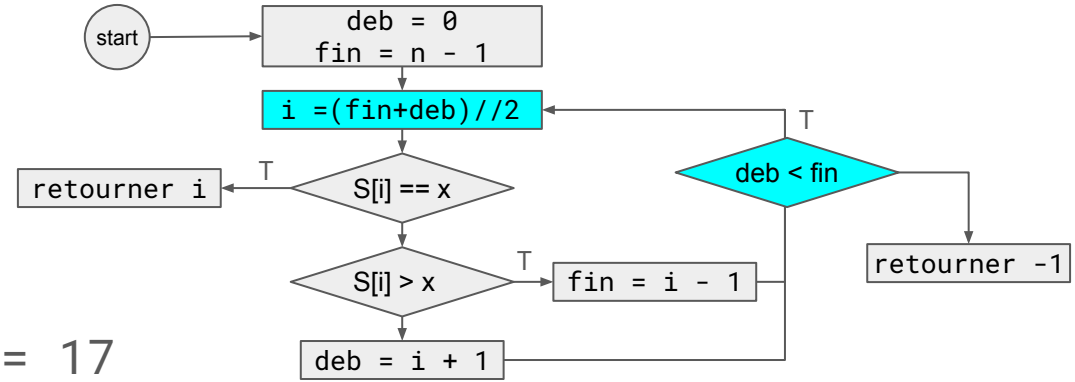


On cherche x = 17

Recherche dichotomique | **Exemple pas à pas**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	3	4	6	7	8	8	11	13	17	18	20	22	24	25	26

deb i fin

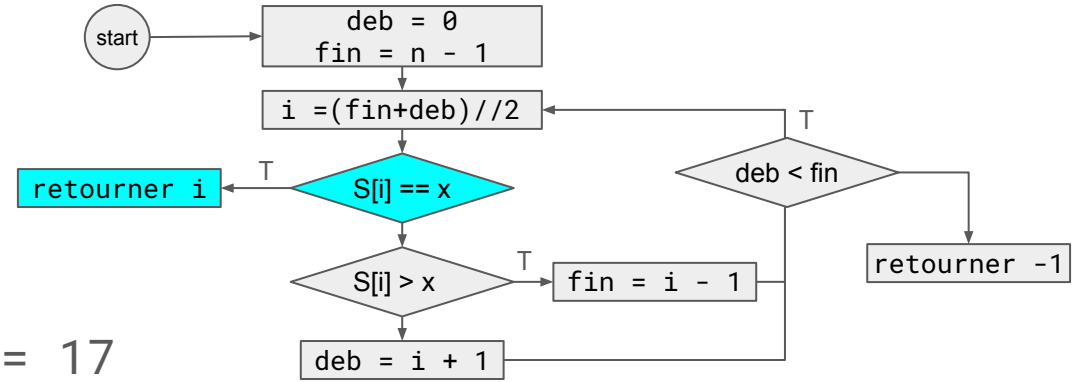


On cherche x = 17

Recherche dichotomique | **Exemple pas à pas**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	3	4	6	7	8	8	11	13	17	18	20	22	24	25	26

i



On cherche x = 17

Question

Quelle est la complexité en temps (pire des cas) de la recherche dichotomique ?

votamatic.unige.ch

code ZZNP

Implémentation

Notez que deux versions sont possibles :

- version **itérative** → Laissée en exercice.
- version **récursive** → À voir maintenant.

Implémentation en Python de la version récursive

```
def recherche_dichotomique(a, v, debut, fin):
    if debut > fin:
        return -1
    milieu = (debut + fin) // 2
    if a[milieu] < v:
        return recherche_dichotomique(a, v, milieu + 1, fin)
    elif a[milieu] > v:
        return recherche_dichotomique(a, v, debut, milieu - 1)
    else:
        return milieu
```

Quid d'un "tri dichotomique" ?

- On construit une nouvelle liste L' (initialement vide) à partir de L (non triée).
- À chaque étape i, on prend l'élément i de L et on l'insère (grâce à la recherche dichotomique) au sein de L'.
  - Parcourir tous les éléments i : $O(n)$
  - Recherche dichotomique : $O(\log(n))$
- Le tri est-il $O(n \log(n))$?

Recherche de l'élément majoritaire

Recherche de l'élément majoritaire

- Soit une séquence de nombres S = [3, 5, 2, 1, 9, …].
- On cherche l'élément m qui constitue **plus de la moitié des éléments**, s'il existe. Autrement dit, le nombre d'occurrences de l'élément m est strictement supérieur à n // 2.
- m se nomme l'**élément majoritaire** de la séquence.
  Par exemple, si S = [3, 5, 3, 1, 3], alors m = 3 est l'élément majoritaire.
- Idée d'approche naïve ? Implémentation ?

Élément majoritaire | **Approche naïve**

- Parcourir n fois la liste :
  - Une première fois pour compter le nombre d'occurrences du premier élément.
  - Une seconde fois pour compter le nombre d'occurrences du second élément.
  - Etc. À chaque fois, si le nombre d'occurrences est supérieur à n / 2, on a trouvé.
- Complexité $O(n^2)$
- Comment faire mieux ?

Élément majoritaire | **Approche "Diviser pour régner"**

Idée :

Élément majoritaire | **Approche "Diviser pour régner"**

Voici le principe de l'algorithme (ne fonctionne pas tel quel !) :

```
def element_majoritaire(a):
    """a est la sous-séquence considérée."""
    n = len(a)
    nouvelle_sequence = [] # séquence à utiliser pour la prochaine récursion.
    for i in range(0, n-1, 2):
        if a[i] == a[i+1]: # ajout de l'élément si couple homogène
            nouvelle_sequence.append(a[i])
    return element_majoritaire(nouvelle_sequence) # appel récursif.
```

(Diapositive hors champ)

Élément majoritaire | **Approche "Diviser pour régner"**

```python
def element_majoritaire(S, a):
    """S est la séquence de base, a est la sous-séquence considérée."""
    n = len(a)
    debut = 0 # contient l'indice du debut à considérer (cf. "élément en trop")
    if n == 0:
        return None # si la liste est vide, pas d'élément majoritaire
    elif n%2==1: # si la taille est impaire, on vérifie le premier élément.
        if compte(S, a[0]) > len(S) // 2:
            return a[0] # l'élément "en trop" est majoritaire, fin de l'algo.
        debut = 1 # si la taille est impaire, on ignorera le premier élément.
    nouvelle_sequence = [] # séquence à utiliser pour la prochaine récursion.
    for i in range(debut, n-1, 2):
        if a[i] == a[i+1]: # ajout de l'élément si couple homogène
            nouvelle_sequence.append(a[i])
    return element_majoritaire(S, nouvelle_sequence) # appel récursif.
```

(Diapositive hors champ)

Élément majoritaire | **Approche par dictionnaire**

- Pourquoi ne pas tenir un compteur d'occurrences pour chaque valeur, au fur et à mesure qu'on parcourt le tableau ?
- Le dictionnaire est idéal pour cela : les clés sont les éléments de S, et les valeurs sont le nombre d'occurrences de ces clés.
- Nommons d le dictionnaire. Par exemple, `d[3]` contient le nombre d'occurrences de 3 au sein de S.
- Implémentation en Python :

Élément majoritaire | **Conclusion**

- L'approche divide-and-conquer donne la meilleure complexité dans le pire des cas.
- En pratique, l'approche par dictionnaire est très efficace (à tester pour soi !).