

Introduction à l'informatique

pour les mathématiques, la physique et les sciences
computationnelles

Yann Thorimbert



**UNIVERSITÉ
DE GENÈVE**

CENTRE UNIVERSITAIRE
D'INFORMATIQUE

Chapitre 2 - Partie 0

Systèmes de numération

Yann Thorimbert



UNIVERSITÉ
DE GENÈVE

CENTRE UNIVERSITAIRE
D'INFORMATIQUE

Chapitres du cours

1. Origines des ordinateurs et des réseaux informatiques
2. **Codage des nombres** ←
3. Codage des médias
4. Circuits logiques
5. Architecture des ordinateurs
6. Conception et exécution de programmes
7. Algorithmique, programmation et structures de données

Signal digital

- Comme on l'a vu, un signal digital peut représenter un **nombre fini de valeurs** différentes.
- On doit donc se servir de ces différentes valeurs pour exprimer tout ce que nous connaissons :
 - Les nombres
 - Les textes
 - Les sons
 - Les images
 - ...

Codage sous forme de nombres

- Idée fondamentale : si une machine possède une représentation d'un nombre, on peut tout coder sous forme de nombres.
- Exemple de codage symboles-nombres :

Symbole	Codage proposé
	1
	2
	3

- Nous devons donc commencer par être capable d'exprimer n'importe quel nombre à l'aide des différents niveaux que le signal digital peut adopter !

Systèmes de numération

- Problème : comment coder les nombres eux-mêmes ?
- Réponse : en établissant des **règles** et des **symboles** arbitraires.
- Ici, on se situe à un niveau mathématique (oublions la machine pour le moment).



Système de numération unaire



Systèmes de numération non positionnels

Chiffres et nombres

- Les symboles qui servent à écrire les **nombres** s'appellent des **chiffres**.
- Certains nombres sont obtenus à partir d'une **combinaison** de plusieurs chiffres, tandis que d'autres ne sont composés que d'un seul chiffre.
- Différence conceptuelle importante entre chiffre et nombre :
« combien y a-t-il de chiffres dans ce nombre ? ».
- Notons que dans les systèmes non positionnels, le concept de zéro n'est pas pertinent.

Systèmes de numération non positionnels

- Problèmes des systèmes non positionnels :
 - Représentation non unique des nombres.
 - Fastidieux à généraliser.
 - Méthodes de calcul difficiles à appliquer.
- Solution ?



Systèmes positionnels | **La base 10 (système décimal)**



Systèmes positionnels | **Poids forts et faibles**



Systemes positionnels | **La base 10 (système décimal)**



Systemes positionnels | **La base 2 (système binaire)**



Systemes positionnels | **Exemple de conversion (1)**



Systèmes positionnels | **Exemple de conversion (2)**



Systèmes positionnels | **Exemple de conversion (3)**



Systèmes positionnels | Nombres à virgule

- On peut étendre le système positionnel à des valeurs de i négatives. L'endroit où i devient négatif est délimité par un symbole spécial : la **virgule**.
- Exemple : $42.03 = 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$.
- La conversion devient plus complexe : un nombre peut avoir un **développement fractionnaire** fini dans une base mais infini dans une autre.
Exemple : $3 / 10 = 0.3$ en base 10, mais en base 2 on ne peut pas l'exprimer avec un nombre fini de chiffres !
- Nous reviendrons sur le sujet quand nous parlerons des **erreurs d'arrondi** du codage des nombres à virgule.

Systèmes positionnels | **Base quelconque**

- b est la base. Si $b > 10$, les chiffres après 9 sont souvent notés A, B, C...
- n est la valeur du nombre exprimé par la séquence de chiffres a_i .
- a_i est le chiffre en position i depuis la droite, en commençant par $i = 0$.
- Il y a k chiffres composant la partie entière du nombre (de 0 à $k - 1$).
- Il y a v chiffres composant la partie non entière du nombre (de $-v$ à -1).

Systèmes positionnels | **Base entière quelconque**

$$n_b = \sum_{i=-v}^{k-1} a_i \cdot b^i$$

- b est la base. Si $b > 10$, les chiffres après 9 sont souvent notés A, B, C...
- n est la valeur du nombre exprimé par la séquence de chiffres a_i .
- a_i est le chiffre en position i depuis la droite, en commençant par $i = 0$.
- Il y a k chiffres composant la partie entière du nombre (de 0 à $k - 1$).
- Il y a v chiffres composant la partie non entière du nombre (de $-v$ à -1).

L'exemple vigésimal des chiffres de Kaktovik



Photo : Danielle Brigida

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19

Trois questions de conversion

votamatic.unige.ch : HRTH



Binaire | **Addition de deux nombres**

- On s'inspire de la méthode des colonnes classique
- Effectuons l'addition $11001_2 + 110011_2$

0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1



Binaire | Soustraction de deux nombres

- On pourrait s'intéresser à la soustraction en colonnes, également inspirée de la méthode décimale...
- ... mais il est souhaitable de l'implémenter comme une addition de nombres potentiellement négatifs (**unicité** de la méthode et du circuit électronique correspondant). À rediscuter par la suite.

Binaire | Multiplication par une puissance de 2

- Exemple sur 3 chiffres : $(a_2 a_1 a_0)_2 \cdot 2^k = ?$



Attention, avec cette notation nous parlons de l'écriture du nombre lui-même.

Ce n'est pas une multiplication entre les nombres a_2 , a_1 et a_0 .

Binaire | Multiplication de deux nombres quelconques

- On observe que tout nombre binaire à k chiffres peut se décomposer comme une addition de k nombres binaires n'ayant qu'un seul chiffre non nul.
- Exemple : $1101_2 = 1000_2 + 0100_2 + 1_2$
- Dès lors, une multiplication d'un nombre par 1101_2 revient à additionner chacun des résultats de la multiplication avec 1000_2 , 100_2 et 1_2
- $1001_2 \cdot 1101_2 = ?$

Binaire | **Plus grand nombre exprimable avec k chiffres**

- Si l'on dispose de k chiffres, quelle est le plus grand nombre exprimable ?
- On accepte que la séquence de chiffres $111\dots 1$ constitue le plus grand nombre.


 k chiffres