

# Eléments d' informatique théorique

## Série 13

**Définition 1** La classe  $\mathcal{T}$  des langages dits “tally” est définie comme

$$\mathcal{T} = \{L \mid L \subseteq \Sigma^* \cap \{\mathbf{0}\}^*\}$$

La classe  $\mathcal{S}$  des langages dits “sparse” est définie comme

$$\mathcal{S} = \{L \mid L \subseteq \Sigma^* \text{ et } \exists c \forall n |\{w \mid w \in L \cap \Sigma^n\}| \leq n^c\}$$

La densité d'un langage  $L$  est définie par la fonction

$$d(n) = \frac{\text{nombre de mots de longueur } n \text{ de } L}{\text{nombre de mots de longueur } n \text{ de } \Sigma^*}$$

**Exercice 13.1** En considérant  $\Sigma = \{0,1\}$ :

1. quelle est la densité d'un langage appartenant à  $\mathcal{T}$  ?
2. quelle est la densité d'un langage appartenant à  $\mathcal{S}$  ?
3. prouvez que  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$  !

**Définition 2** Class complémentaire Pour une classe de langages  $C$ , la classe associée  $\text{co-}C$  est définie comme

$$\text{co-}C = \{L \mid \overline{L} \in C\}$$

**Exercice 13.2** Prouvez que  $\text{co-DTIME}(f(n)) = \text{DTIME}(f(n))$

**Exercice 13.3** Prouvez que  $\text{DSpace}(2^{2^n+n})$  inclut strictement  $\text{DSpace}(2^{2^n})$  !  
Que peut-on dire de  $\text{DTIME}(2^{2^n+n})$  et  $\text{DTIME}(2^{2^n})$  ?

**Exercice 13.4** Etablissez la relation entre les deux classes de complexité:

1.  $\text{DSpace}(n^2)$  et  $\text{DSpace}(f(n))$  où  $f(n) = \begin{cases} n^3 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$
2.  $\text{DTIME}(2^n)$  et  $\text{DSpace}(5^n)$ .