

Fiche mémotechnique sur les ordres de magnitude

Eléments d'informatique théorique *

1 Définitions

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$.

Définition 1

- $f = \mathcal{O}(g)$ (g domine f) si $\exists C, N \ f(n) \leq Cg(n) \ \forall n \geq N$.
- $f = o(g)$ si $\forall C \exists N \ f(n) \leq Cg(n) \ \forall n \geq N$.
- $f = \Omega(g)$ si $\exists C, N \ g(n) \leq Cf(n) \ \forall n \geq N$.
- $f = \omega(g)$ si $\forall C \exists N \ g(n) \leq Cf(n) \ \forall n \geq N$.
- $f = \Theta(g)$ si $\exists C_1, C_2, N \ C_1g(n) \leq f(n) \leq C_2g(n) \ \forall n \geq N$.
- $f = \Omega_\infty(g)$ si $\exists C \exists^\infty n \ g(n) \leq Cf(n)$.
- $f = \omega_\infty(g)$ si $\forall C \exists^\infty n \ g(n) \leq Cf(n)$.

L'ordre de magnitude le plus utilisé est le symbole de Landau, autre nom donné à $\mathcal{O}$. Il y a de nombreuses façon de définir les ordres de magnitude. Nous en donnons pour exemple la proposition suivante.

Proposition 1 $o(f) = \{g \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0\}$.

La proposition suivante est aussi fort utile.

Proposition 2 $f = \Theta(g)$ ssi $f = \mathcal{O}(g)$ et $g = \mathcal{O}(f)$.

Soit F une famille de fonctions.

Définition 2

- $\mathcal{O}(F) = \bigcup_{f \in F} \mathcal{O}(f)$
- $o(F) = \bigcap_{f \in F} o(f)$
- $\Omega(F) = \bigcup_{f \in F} \Omega(f)$
- $\omega(F) = \bigcap_{f \in F} \omega(f)$

- $\Theta(F) = \bigcup_{f \in F} \Theta(f)$
- $\Omega_\infty(F) = \bigcup_{f \in F} \Omega_\infty(f)$
- $\omega_\infty(F) = \bigcap_{f \in F} \omega_\infty(f)$

Proposition 3 Soient f une fonction et γ une fonction ou une famille de fonctions, alors:

- $f = \mathcal{O}(\gamma)$ ou (exclusif) $f = \omega_\infty(\gamma)$.
- $f = \Omega_\infty(\gamma)$ ou (exclusif) $f = o(\gamma)$.

Proposition 4 (Θ est absorbant) Soit F une famille de fonctions, soit ∇ un opérateur, $\nabla \in \{\mathcal{O}, o, \Omega, \omega, \Omega_\infty\}$, alors $\Theta(\nabla(F)) = \nabla(f)$.

Voici un exemple d'utilisation de la notation $\mathcal{O}$.

Exemple 1 Soit f une fonction, alors $f = \Theta(2^{\lceil \log_2 f \rceil})$

2 Propriétés

2.1 Propriétés de $\mathcal{O}$

- Si $f = \mathcal{O}(g)$ et que c est une constante, alors $cf = \mathcal{O}(g)$.
- Si f_1 et f_2 sont dans $\mathcal{O}(g)$, alors $f_1 + f_2$ aussi.
- Si $f_1 = \mathcal{O}(g_1)$ et $f_2 = \mathcal{O}(g_2)$, alors
 - $f_1 + f_2 = \mathcal{O}(g_1 + g_2)$;
 - $f_1 + f_2 = \mathcal{O}(\max(g_1, g_2))$;
 - $f_1 f_2 = \mathcal{O}(g_1 g_2)$.
- Soit p un polynôme de degré n , alors $p = \mathcal{O}(x^n)$.
- Si p et q sont deux polynômes de degré $m \geq n$ respectivement, alors $\frac{p}{q} = \mathcal{O}(x^{m-n})$.
- Si f est une fonction bornée, alors $f = \mathcal{O}(1)$.
- $\forall a, b > 1, \mathcal{O}(\log_a x) = \mathcal{O}(\log_b x)$.

* CopyLeft: Olivier Powell, Université de Genève, Département d'informatique, Suisse, olivier.powell@cui.unige.ch

- Si $f = \mathcal{O}(g)$ et que $h \geq g$, alors $f = \mathcal{O}(h)$.
- Si $f = \mathcal{O}(x^m)$ alors $f = \mathcal{O}(x^n)$, $\forall n > m$.

Remarque 1 Parmi les classes de fonctions les plus souvent décrites au moyen de l'opérateur de Landau, on trouve notamment: $\mathcal{O}(1) \subset \mathcal{O}(\log x) \subset \mathcal{O}(x) \subset \mathcal{O}(x \log x) \subset \mathcal{O}(x^2) \subset \mathcal{O}(2^x) \subset \mathcal{O}(x!) \subset \mathcal{O}(x^x)$.

References

- [BDG94] José L. Balcázar, Josep Díaz, and Joaquim Gabarró. *Structural Complexity I*. Springer, Berlin Heidelberg, New York, second edition, 1994.
- [Ros00] Keneth H. Rosen, editor. *Foundations*, pages 37 – 40. CRC Press, 2000.

2.2 Propriétés de o

- Si $f = o(g)$, alors $cf = o(g)$, pour toute constante non nulle c .
- Si f_1 et f_2 sont dans $o(g)$, alors $f_1 + f_2$ aussi.
- Si $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$, alors
 - $f_1 + f_2 = o(g_1 + g_2)$;
 - $f_1 + f_2 = o(\max(g_1, g_2))$;
 - $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.
- Si p et q sont deux polynômes de degré $m < n$ respectivement, alors $\frac{p}{q} = o(1)$.
- Soit C une constante. On a alors: $f(x) \in L + o(1) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = C$.
- Si $f = o(g)$, alors $f = \mathcal{O}(g)$, mais la réciproque ne tient pas.
- Si $f = \mathcal{O}(g)$ et $h = o(f)$, alors $h = o(g)$.
- Si $f = o(g)$ et $h = \mathcal{O}(f)$, alors $h = \mathcal{O}(g)$.
- Si $f = \mathcal{O}(g)$ et $h = \mathcal{O}(f)$, alors $h = \mathcal{O}(g)$.
- Si $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.
- $f = \mathcal{O}(g)$ ssi $g = \Omega(f)$.
- $f = \Theta(g)$ ssi $f = \mathcal{O}(g)$ et $g = \mathcal{O}(f)$.
- $f = \Theta(g)$ ssi $f = \mathcal{O}(g)$ et $g = \Omega(f)$.
- Si f est une fonction bornée, alors $f = \mathcal{O}(1)$.
- $\forall a, b > 1$, $\mathcal{O}(\log_a x) = \mathcal{O}(\log_b x)$.
- Si $f = \mathcal{O}(g)$ et que $h \geq g$, alors $f = \mathcal{O}(h)$.
- Si $f = \mathcal{O}(x^m)$ alors $f = \mathcal{O}(x^n)$, $\forall n > m$.