Programmation logique

Comment exprimer des algorithmes ?

Approche procédurale :

machines de Turing, …, langages algorithmiques, …, C, Pascal, Java, …

Approche fonctionnelle :

définir des fonctions mathématiques

λ-calcul, …, Lisp, Scheme, CAML, …

Approche logique :

calculer = prouver

logique des prédicats + déduction, clauses de Horn, Prolog, Datalog, …

Choisir l'approche en fonction du problème à traiter.

Prolog

«Programme» Prolog (= Théorie logique)

- faits
- règles
- question

La question est-elle prouvable à partir des faits et règles ?

```
humain(paul).              /* fait 1 */
animal(bonzo).             /* fait 2 */
parle(X) :- humain(X).     /* règle 1 */

?- parle(bonzo).
no
?- parle(paul).
yes
?- parle(toto).
no
```


Syntaxe

Constantes, fonctions, prédicats : `c, x36, bonnne_annee, …`

Variables: `X, Y, A, Arc, _X, …`

Formules:

- clauses de Horn
- variables quantifiées universellement (implicitement)
- un seul littéral positif
- :- remplace <=
- , remplace $\wedge$

```
parle(X) :- humain(X), not bebe(X).
```

signifie

$\forall x\,(\,\text{humain}(x) \wedge \neg\,\text{bebe}(x) \Rightarrow \text{parle}(x))$

Questions ouvertes

Si une question contient une ou plusieurs variables

Prolog cherche toutes les valeurs des variables qui rendent la question prouvable.

```
humain(paul).
humain(ernest).
humain(albert).
animal(bonzo).
bebe(ernest).
bebe(jim).

parle(X) :- humain(X), not bebe(X).

?- parle(Z).
Z = paul ;
Z = albert ;
no
```

Technique de résolution

Prolog utilise le principe de résolution en chaînage arrière.

Pour prouver

```
p(a)
```

chercher

soit un fait

```
p(t)
```

soit une règle

```
p(t) :- L1, L2, …, Ln
```

tels que `a` soit unifiable avec `t`

Si c'est un fait de base, la preuve est terminée

Si c'est une règle,

il faut prouver `L1`, `L2`, … , `Ln`, on utilise la même technique.

si la preuve ne marche pas on essaye une autre unification.

Exemple

faits et règles

```
carnivore(X) :- animal(X), mange(X, viande).
mange(emilie, poisson).
mange(albert, carottes).
mange(dagobert, pain).
mange(dagobert, viande).            (b)
animal(dagobert).                   (a)
animal(spido).

?- carnivore(dagobert).
```

1. Unification `X = dagobert` et on résolution avec la `carnivore(X) :- ...`
2. Reste à prouver : `animal(dagobert)` et `mange(dagobert, viande)` .
3. Preuves avec les faits (a) et (b)

Justification par la méthode de résolution

Pour prouver carnivore(dagobert) on essaye de réfuter

```
non carnivore(dagobert)
```

Résolutionavec la clause

```
        carnivore(X) :- animal(X), mange(X, viande)
    == carnivore(X) ou non animal(X) ou non mange(X, viande)
```

Unificateur: `X = dagobert`

Résolvant

```
non animal(dagobert) ou non mange(dagobert, viande)
```

Résolution avec `animal(dagobert)`

Résolvant:

```
non mange(dagobert, viande)
```

Résolution avec `mange(dagobert, viande)`

Résolvant: --> clause vide --> réfutation

Exemple avec une négation

```
humain(paul).
humain(ernest).
humain(albert).
animal(bonzo).
bebe(ernest).
bebe(jim).

parle(X) :- humain(X), not bebe(X).

?- parle(albert).
```

Résolution avec `parle(X) :- humain(X), not bebe(X)` .

Unificateur: `X = albert`

Résolvant: `humain(albert), not bebe(albert)` .

Négation (suite)

A prouver: `humain(albert), not bebe(albert)` .

1) `humain(albert)` est un fait --> OK

2) prouver `not bebe(albert)` .

On ne trouve aucun fait ou règle pour `bebe(albert)` .

Donc impossible de prouver `bebe(albert)`

NEGATION PAR ECHEC

on considère que `not bebe(albert)` est prouvé

Donc `parle(albert)` est prouvé.

Le processus de recherche en marche arrière

Problème: on a en général beaucoup de choix possibles pour appliquer la résolution.

Solution Prolog: chaînage arrière

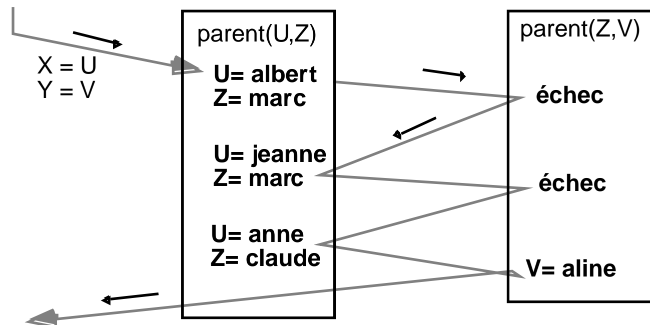
Lorsque un sous-but ne peut être satisfait,

- revient au sous-but précédent,
- essaye de le satisfaire d'une autre manière,
- repart en avant.

Exemple.

```
parent(albert, marc). parent(jeanne, marc).
parent(anne, claude).
parent(anne, paul). parent(claude, aline).
grand_parent(X,Y) :- parent(X,Z), parent(Z,Y).
```

grand_parent(U,V)



Les instantiations de variables sont défaites lors de la marche arrière.

Trace de la recherche

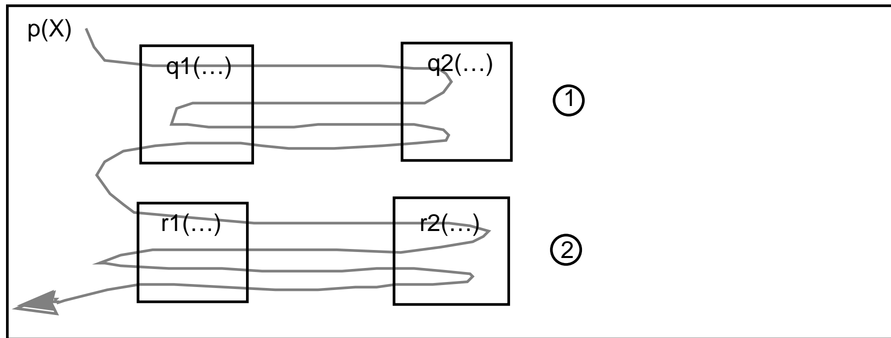
```
• 1 | 1 call grand_parent(_420,_421)
• 2 | 2 call parent(_420,_1250)
• 2 | 2 exit parent(albert,marc)
• 3 | 2 call parent(marc,_421)
• 3 | 2 fail parent(marc,_421)
• 2 | 2 redo parent(albert,marc)
• 2 | 2 exit parent(jeanne,marc)
• 4 | 2 call parent(marc,_421)
• 4 | 2 fail parent(marc,_421)
• 2 | 2 redo parent(jeanne,marc)
• 2 | 2 exit parent(anne,claude)
• 5 | 2 call parent(claude,_421)
• 5 | 2 exit parent(claude,aline)
• 1 | 1 exit grand_parent(anne,aline)
• 1 | 1 redo grand_parent(anne,aline)
• 5 | 2 redo parent(claude,aline)
• 5 | 2 fail parent(claude,_421)
```

Choix des sous-buts

A l'intérieur d'une règle : ordre d'écriture

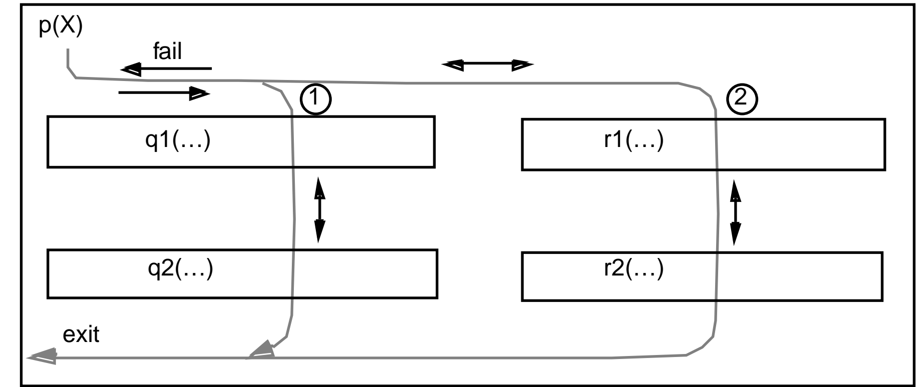
S'il y a plusieurs règles dont la tête est unifiable : ordre d'écriture des règles

```
p(X) :- q1(…), q2(…).        /* 1 */
p(X) :- r1(…), r2(…)  .      /* 2 */
```



Représentation graphique du « chemin de satisfaction »

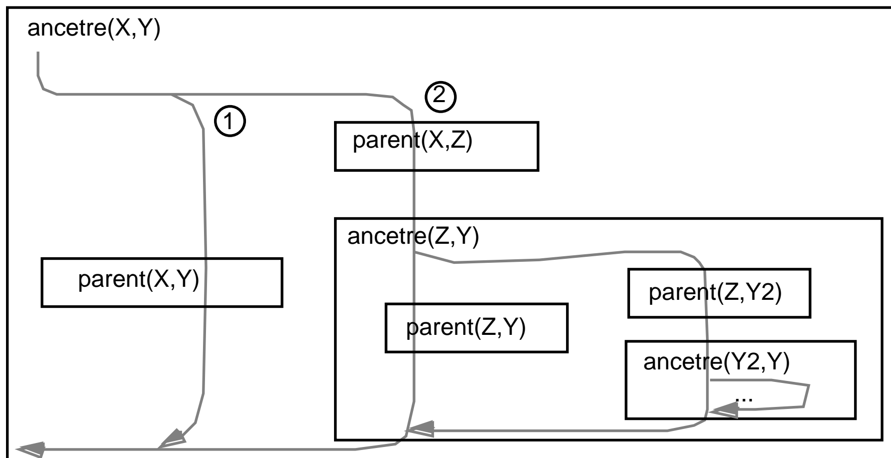
```
p(X) :- q1(…), q2(…).
p(X) :- r1(…), r2(…).
```



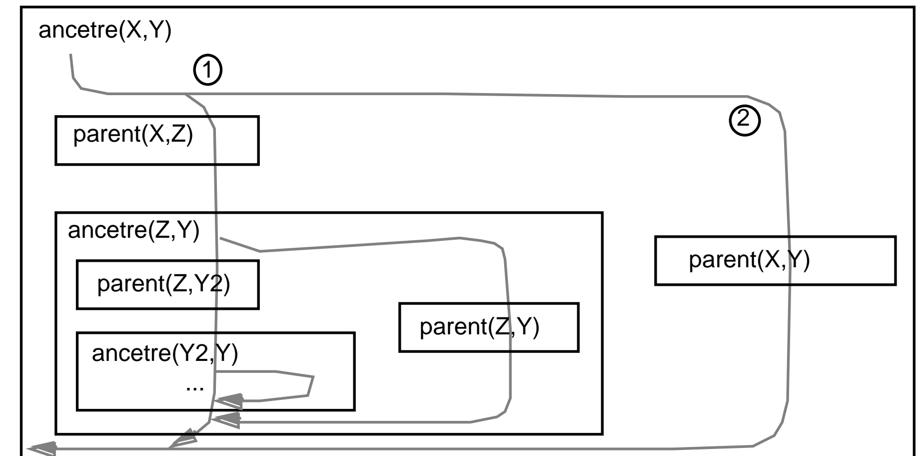
En cas d'échec on recule sur le chemin

Règles récursives

```
ancetre(X,Y) :- parent(X,Y).
ancetre(X,Y) :- parent(X,Z),ancetre(Z,Y).
```



Importance de l'ordre de déclaration



On n'en sort jamais !

Unification et fonctions

Pour satisfaire un but `p(v1, …, vn)`

il faut trouver un fait ou une règle de la forme `p(w1, …, wn) :- …`

tel que

`v1` unifiable avec `w1`, …, `vn` unifiable avec `wn`

Règle d'unification

- si `v` est une variable et `w` est un object quelconque: OK
- si `v` et `w` sont des variables : OK, `v` et `w` sont désormais «liées»
- un atome ou nombre entier ne s'unifie qu'avec lui-même
- une fonction (structure) ne s'unifie qu'avec
- une fonction de même nom
- et de même nombre de paramètres
- si les paramètres sont unifiables (récursion)

N.B. Les fonctions ne sont pas évaluées (≠ programmation impérative), sauf demande explicite.

Exemples

```
Faits: p(35), p(a), p(f(3,b)), p(a+3), p(6+7).
```

```
?- p(35)
yes

?- p(c).
no

?- p(X).
X = 35;
X = a;
X = f(3,b);
X = a+3;
X = 6+7;
```

```
?- p(f(X,Y)).
X = 3
Y = b

?p(13).
no

?p(X+Y).
X = a
Y = 3 ;
X = 6
Y = 7
```


Exemple: Théorie des nombres

Représentation des nombres

- la constante 0
- la fonction s (unaire) p.ex. 5 est représenté par s(s(s(s(s(0)))))
- la fonction + (binaire)

Prédicat: egal(binaire)

Axiomes :

$\forall x\ (x+0 = x)$

$\forall x\ (0+x = x)$

$\forall x \forall y \forall z\ (x+y = z \Rightarrow x+s(y) = s(z))$

Prolog

egal(X+0, X).

egal(0+X, X).

egal(X+s(Y), Z) :- egal(X, Y, Z).

Essais

```
?- egal(s(s(0))+s(s(s(0))), s(s(s(s(s(0)))))).
yes
?- egal(s(s(0))+s(s(0)),X).
X = s(s(s(s(0))))
?- egal(X+s(s(0)),s(s(s(s(s(0)))))).
X = s(s(s(0))) ;
egal(X, s(s(s(s(0))))).
X = s(s(s(s(0))))+0 ;
X = 0+s(s(s(s(0)))) ;
X = s(s(s(0)))+s(0) ;
X = 0+s(s(s(s(0)))) ;
X = s(s(0))+s(s(0)) ;
X = 0+s(s(s(s(0)))) ;
X = s(0)+s(s(s(0))) ;
X = 0+s(s(s(s(0)))) ;
X = 0+s(s(s(s(0)))) ;
X = 0+s(s(s(s(0)))) ;
```

Une infinité de réponses

```
egal(X, Y).

X = _5946+0
Y = _5946 ;

X = 0+_5946
Y = _5946 ;

X = _6124+s(0)
Y = s(_6124) ;

X = 0+s(_6125)
Y = s(_6125) ;
...
X = _6124+s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(0))))))))))
Y = s(s(s(s(s(s(s(s(s(s(_6124))))))))))
etc.
```


Négation par échec de preuve

Le but `not P(X)` est satisfait si on n'arrive pas à prouver `P(X)`.

Particularité (non logique) : les instantiations sont défaites lors de l'échec

Exemple

```
cours(a1). cours(a2). cours(b1).
cours(b2). cours(c1). cours(c2).
prereq(a1,b1). prereq(a2,b1). prereq(b1,c1).
prereq(b2,c1). prereq(b3,c2).
etu(paul). etu(pierre). etu(amelie).
acquis(paul,a1). acquis(paul,a2).
acquis(pierre,a2).
acquis(amelie,b3).

ne_peut_s_inscrire(X,Y) :- prereq(Z,Y), not acquis(X,Z).
peut_s_inscrire1(X,Y) :-  not ne_peut_s_inscrire(X,Y).
```


Utilisation

```
?- peut_s_inscrire1(paul,b1).
yes
?- peut_s_inscrire1(paul,Y).
no
```

Le Y qui a causé l'échec n'est pas transmis en arrière ***/

Réparation

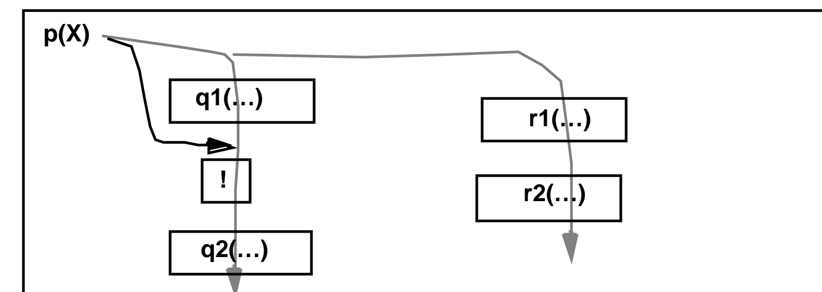
```
peut_s_inscrire2(X,Y) :-  etu(X), cours(Y), not
ne_peut_s_inscrire(X,Y).
?- peut_s_inscrire2(paul,Y).
Y = a1 ;
Y = a2 ;
Y = b1 ;
Y = b2 ;
```


Contrôle de l'exploration

Il est parfois utile ou nécessaire d'empêcher la marche arrière.

- n'utiliser qu'une seule règle pour résoudre un but
- détecter les situations d'échec où la recherche d'autres solutions ne conduira à rien (optimisation).
- lorsque on sait qu'il n'y a qu'une seule solution, pour éviter la recherche d'alternatives (optimisation).

Principe

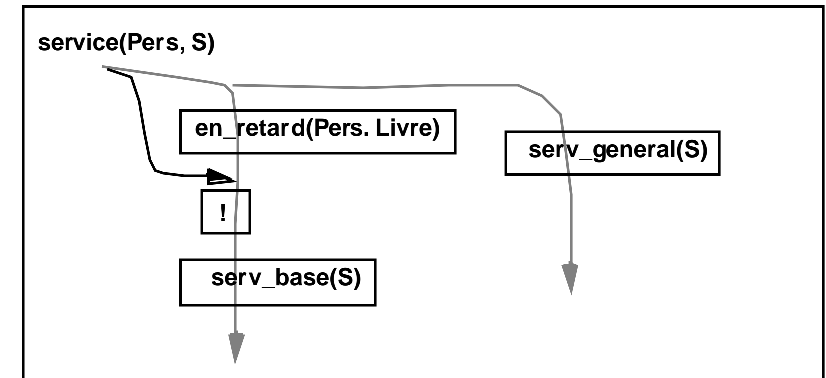


Exemple: choix d'une seule règle

Les personnes qui ont un livre en retard n'ont accès qu'aux serives de base de la bibliothèque.

```
service(Pers, S) :- en_retard(Pers, Livre), !, serv_base(S).
service(Pers, S) :- serv_general(S).

serv_base(reference).
serv_base(questions).

serv_additionnel(emprunt).
serv_additionnel(pret_inter_biblio).

serv_general(X) :- serv_base(X).
serv_general(X) :- serv_additionnel(X).

en_retard('G. Oublié', 'Mathematical logic for CS').
en_retard('J. Vai', 'Le grand tout').
```


Chemins de satisfaction



Choix d'une seule règle

```
somme(0,0).

somme(N, R) :- N1 is N - 1, /* somme des entiers de 0 à N = R */
              somme(N1, R1),
              R is R1 + 1
```

Que se passe-t-il dans

```
but :- p(X), somme(0, R), q(X, R).
```

lorsque q(X, R) échoue ?

Plus sûr:

```
somme(0, 0) :- !.
```

Encore plus sûr:

```
somme(N, 0) :- N < 1, !.
```


Remplacement de ! par not

```
somme(N, 0) :- N < 1.
somme(N, R) :- N1 is N - 1,
              not (N < 1), /* bloque la règle si N < 1 */
              somme(N1, R1),
              R is R1 + 1
```

Et vice-versa

```
A :- B, C.
A :- not B, D
```

Devient

```
A :- B, !, C.
A :- D
```

Plus efficace: on essaye de satisfaire B une seule fois.

Echecs sans autres alternatives

Commencer par éliminer les cas pour lesquels

- on sait que le prédicat est faux;
- on veut que le prédicat soit faux.

```
etudiant_standard(E) :- mobile(X), !, fail.
etudiant_standard(E) :- licence(X, L), licence(X, L2),L =/ L2,
!, fail.
etudiant_standard(E) :- .../* test compliqué */
```


Une seule solution

Situation

- Il existe plusieurs manières de trouver la solution
- On sait qu'il n'y a qu'une solution
-

```
habite(X, Ville) :- adresse(X, Rue, No, Ville), !.
habite(X, Ville) :- habite_chez(X, Y), habite(Y, Ville), !.
habite(X, Ville) :- sous_locataire(X, Y), habite(Y, Ville), !.
```

etc.

```
actif(Prof) :- enseigne(Prof, Matiere), !.

eligible(Prof) :- actif(Prof), engage_en(Prof, Date), Date <
1999.
```